Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Florian Kunstmann
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerische Optimierung
WiSe 2015/2016

Übungsblatt 12

Besprechung 27.01.2016.

Hinweis: Gleichung (4.53) im Skript enthält einen Fehler. Der Parameter vor der Barriere-Funktion ist nicht μ, sondern $\frac{1}{\mu}$.

Aufgabe 36 (Konvergenz des Barriere-Verfahrens) (4 Punkte)

Seien $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig und $\{(x^{(k)}\}$ eine durch Algorithmus (4.5.3) erzeugte Folge. Zusätzlich sei $\tau_k = \frac{m}{\mu_k}$ die Abbruchbedingung im k-ten Schritt. Es gelte

$$\tau_{k+1} \leq \left(1 - \frac{\delta}{m^r}\right)\tau_k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

mit gewissen Parametern $\delta > 0$ und $r > 0$. Der Startvektor $x^{(0)}$ erfülle die Bedingung

$$\tau_0 \leq \frac{1}{\varepsilon^\kappa}, \qquad \kappa > 0$$

Zeigen Sie, dass dann ein Index $K \in \mathbb{N}$ existiert, mit $K = \mathcal{O}(m^r|log(\varepsilon)|)$ und $\tau_k \leq \varepsilon$ für alle $k \geq K$.

Aufgabe 37 (Nichtglatte, konvexe Probleme) (3+3+3 Punkte)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer, offen und konvex, $f : X \mapsto \mathbb{R}$ konvex, $x \in X$. Dann gilt:

(a) $\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^n : g^T s \leq f'(x,s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^n\}$ mit $f'(x,s) := \inf_{t>0} \Delta_s(t)$.

(b) $\partial f(x)$ ist konvex und kompakt. Bezeichnet weiterhin $L > 0$ die Lipschitz-Konstante von f nahe x, so gilt $\partial f(x) \subset \overline{B_L(0)}$

(c) $f'(x,s) = \max_{g \in \partial f(x)} g^T s, \quad \forall s \in \mathbb{R}^n$

(d) f ist genau dann differenzierbar in x mit $\nabla f(x) = g$, wenn $\partial f(x) = \{g\}$ gilt.

Beweisen Sie (a),(b) und (d).

Hinweis: Mit obigen Voraussetzungen ist f nicht nur richtungsmäßig differenzierbar, sondern sogar Bouligand-differenzierbar, d.h.

$$|f(x+s) - f(x) - f'(x,s)| = o(||s||) \quad \|s\| \mapsto 0$$