Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Florian Kunstmann
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerische Optimierung
WiSe 2015/2016

Übungsblatt 13

Besprechung 03.02.2016.

Hinweise: Die Abgabe der Lösungen der Matlab-Aufgaben erfolgt per Email (bis 23:59 Uhr am Vortag der Besprechung!) an

florian.kunstmann@uni-ulm.de.

Der Betreff sollte lauten "Num3Blatt$x$" (wobei x für die Nummer des Blattes steht). Die Lösungen müssen als **Anhang** an die Email versendet werden. Für jede Programmieraufgabe ist ein zip-file "AufgabeMy" zu erstellen (wobei y für die Nummer der Aufgabe steht), das die nötigen .m-files enthält.

Aufgabe 38 (Anwendung des Subgradientenverfahrens) (4+3 Punkte)

(i) Man betrachte das Problem:

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)$$

für $f(x) = |x|$ mit Lösung $x^* = 0$. Wenden Sie das Subgradientenverfahren an (wegen $X = \mathbb{R}^n$ ist $P_X = id$) mit den Schrittweiten:

1) $\sigma_k = \frac{1}{k+1}$,

2) $\sigma_k = \frac{f(x^k)-f(x^*)}{|g^{(k)}|}$.

Berechnen Sie für $x^{(0)} = 2$ in beiden Fällen $x^{(1)}, \dots, x^{(5)}$ (solange nicht $g^{(k)} = 0$ auftritt).

(ii) Sei nun $f(x) = (|x| + 1)^2$ mit Minimum $x^* = 0$. Zeigen Sie, dass das Subgradientenverfahren mit Schrittweitenwahl 2) für alle Startpunkte $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ Iterierte $x^{(k)}$ liefert mit:

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq \frac{1}{2}|x^{(k)} - x^*|.$$

Aufgabe 39 (Subgradienten-Verfahren) (5 Punkte)

Wir möchten das Projizierte Subgradienten-Verfahren (Algorithmus 4.6.1) implementieren und auf die Beispiele aus Aufgabe 38 anwenden, welche im Skript `test.m` (Beispiel 1) schon gegeben sind. Beispiel 2 enthält eine weitere Funktion, die sogenannte Wolfe-Funktion, welche ihr Minimum bei $(-1, 0)$ besitzt. Die Berechnung der Subgradienten dieser Funktion ist in `function g = Subgrad_Wolfe(x,f)` realisiert. Ergänzen Sie die Funktion

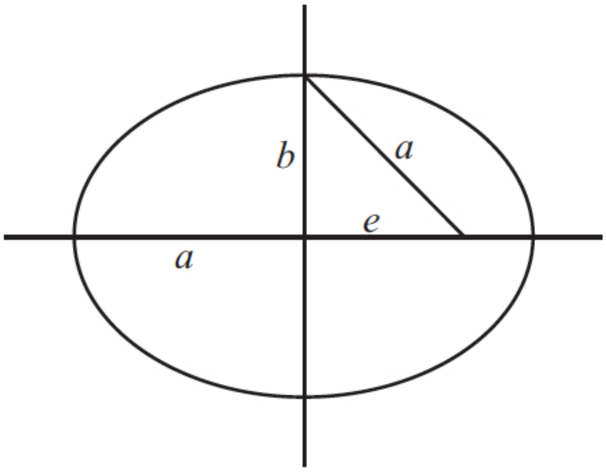
```
function [x,k] = Projiziertes_Subgradienten_Verfahren(x0,f,sigma,S,P,TOL)
```

so, dass Sie das Projizierte Subgradienten-Verfahren auf die obigen Beispiele anwenden können.

Aufgabe 40 (Projektion - Am Beispiel einer Ellipse) (5 Punkte)

In den Beispielen in Aufgabe 39 haben wir uns nur auf die Projektion $P_X = Id$ beschränkt. Wir möchten nun eine Projektion auf eine konvexe Menge (im $\mathbb{R}^2$) anhand einer Ellipse herleiten und implementieren. Gegeben sei eine Ellipse in erster Hauptlage, vergleiche untere Abbildung, d.h. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Diese Ellipse besitzt die Brennpunkte $\pm e$, wobei $e^2 = a^2 - b^2$. Durch Verschiebung um den (positiven) Brennpunkt und Betrachtung der Polarkoordinaten, also $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ erhalten wir gerade:

$$\frac{(r\cos\varphi + e)^2}{a^2} + \frac{(r\sin\varphi)^2}{b^2} = 1.$$



Ausmultiplizieren und Auflösen nach r ergibt

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi},$$

wobei $p = \frac{b^2}{a}$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$. (Man kann die Ellipse natürlich auch um den anderen Brennpunkt verschieben). Wir erhalten damit also für die Oberfläche der Ellipse die folgende Darstellung:

$$\Phi(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cdot \cos\varphi \\ r(\varphi) \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi],$$

Liegt also ein Punkt x innerhalb der Ellipse$=X$, so ist $P_X(x) = x$. Liegt der Punkt x jedoch außerhalb von X, so ist $P_X(x) = y$, wobei

$$y = \arg\min_{y \in X} \|y - x\|_2 = \arg\min_{y \in \partial X} \|y - x\|.$$

Das bedeutet, dass wir erneut ein (unrestringiertes) Minimierungsproblem lösen müssen, nämlich: Suche $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit:

$$\|\Phi(\varphi) - x\|_2 \to \min \tag{1}$$

also eine Minimierung bezüglich des Winkels! Damit ist $y = \arg\min_{y \in X} \|y - x\|_2 = \Phi(\varphi^*)$ mit φ^* Lösung von (1).

(i) Versuchen Sie die Funktion `function x = Projektion_Ellipse(x)` zu verstehen. Wenden Sie diese im Fall der Wolfe-Funktion an. Variieren Sie die Längen a und b, wobei $b \leq a$. Was ist zu beobachten?

(ii) Wie lassen sich weitere Projektionen auf beliebige konvexe Mengen X realisieren?

(iii) Implementerien Sie eine Projektion auf die folgende konvexe Menge:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq (x - a)^2 + b\}.$$

Der Rand dieser Menge wird durch die konvexe Funktion $f(x) = (x - a)^2 + b$ beschrieben, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Ihre Funktion soll wie folgt aufgerufen werden

`function x = Projektion_Parabel(x).`

Orientieren Sie sich dabei auf die schon gegebene Funktion `function x = Projektion_Ellipse(x).`

(iv) Wenden Sie die Projektion `function x = Projektion_Ellipse(x)` auf die Wolfe-Funktion an. Variieren Sie auch hier a, b.