Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2016/2017
Blatt 5
17.11.2016

Angewandte Numerik 2

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 21.11.2016 bis 25.11.2016

Für dieses Übungsblatt gibt es 16 Theorie- und 16 Matlab-Punkte, sowie 5 Theorie- und keine Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 60-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 5) bei 41,4 Theoriepunkten und 48 Matlabpunkten.

Aufgabe 15 *(Konstruktion von Splines)* (7T Punkte)

Gegeben sei die Funktion $s : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$s(x) := \begin{cases} (\alpha x - 1)(x^3 + \beta x), & x \in [-1, 0) \\ \delta x^3 + 2x - \gamma, & x \in [0, 1) \\ \epsilon x^2(x-1) + x + \frac{1}{3}, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Parameter α, β, γ, δ und ϵ so, dass s ein kubischer Spline bezüglich der vorgegebenen Knoten $t_i \in \mathcal{T} = \{-1, 0, 1, 2\}$ ist.

Aufgabe 16 *(Aufstellen des linearen Gleichungssystem zur Bestimmung von Splines)* (3T+3T+3T Punkte)

Es sei $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und die Stützstellen $t_i := i$, $i = 0, \ldots, 4$ gegeben. Geben Sie jeweils explizit das lineare Gleichungssysteme zur Bestimmung der Koeffizienten des kubischen Splines s an, der f interpoliert. Und zwar bei

a) vollständigen Randbedingungen: $s'(0) = f'(0)$, $s'(4) = f'(4)$,

b) natürlichen Randbedingungen: $s''(0) = s''(4) = 0$,

c) periodischen Randbedingungen: $s'(0) = s'(4)$, $s''(0) = s''(4)$ (hier gilt zusätzlich $f(0) = f(4)$).

Hinweis: Stellen Sie jeweils nur das lineare Gleichungssystem auf. Sie brauchen dieses nicht explizit zu lösen. Hinweise zur Aufstellung dieser linearen Gleichungssysteme finden Sie im Skript unter „Berechnung kubischer Splines“.

Aufgabe 17 *(Berechnung eines natürlichen kubischen Splines)* (5T* Punkte)

Gegeben sind die fünf Wertepaare $(t_i, f_i)_{i=0,\ldots,4}$ als

t_i	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
f_i	1.0	2.0	1.0	0.0	1.0

Berechnen Sie den Wert des interpolierenden kubischen Splines mit natürlichen Randbedingungen an der Stelle $x = 0.35$. Wiederum im Skript unter „Berechnung kubischer Splines“ finden Sie die Vorgehensweise, um die Koeffizienten a_i, b_i, c_i und d_i des Splines in der Darstellung

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - t_i) + c_i(x - t_i)^2 + d_i(x - t_i)^3$$

zu bestimmen.

Hinweis: Zur Lösung des auftretenden linearen Gleichungssystems können Sie Matlab verwenden.

Aufgabe 18 *(Programmieraufgabe: Kubische Splines)* (8M+5M+3M Punkte)

a) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `C = cubicSplineCoeff(t, y, randBed, param)`, wobei

- `t` der Vektor $(t_0, ..., t_{n+1})^T$ der Knoten t_k, $k = 0, ..., n+1$ mit $t_k < t_{k+1}$ ist,
- `y` ein Vektor $(y_0, ..., y_{n+1})^T$ von Werten y_k an den Knoten t_k, $k = 0, ..., n+1$ ist,
- `randBed` die Randbedingungen angibt und die Werte `'nat'` für natürliche Randbedingungen, `'vollst'` für vollständige Randbedingungen und `'per'` für periodische Randbedingungen annehmen kann,
- `param` ein Vektor mit den gegebenenfalls benötigten Werten der Randbedingungen ist.

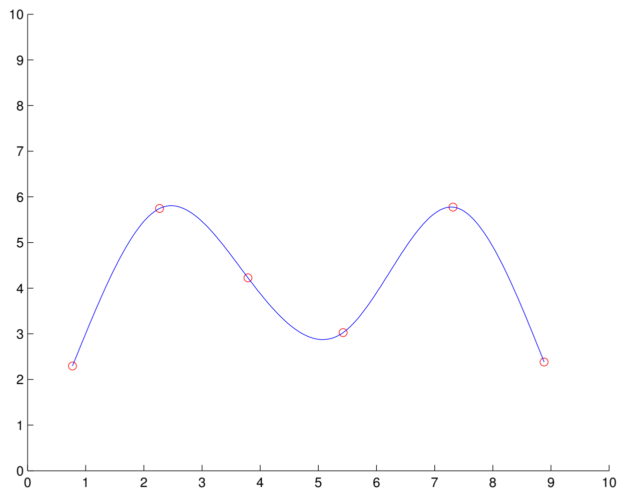
Ihre Matlabfunktion `C = cubicSplineCoeff(t, y, randBed, param)` soll die Koeffizienten des kubischen Splines s mit $s_k(x) = a_k(x-t_k)^3 + b_k(x-t_k)^2 + c_k(x-t_k) + d_k$, $k = 0, ..., n$, der die Paare (t_k, y_k), $k = 0, ..., n+1$ interpoliert, berechnen und sie in der Koeffizientenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & \dots & d_n \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times(n+1)}$$

zurück geben. Sie dürfen das auftretende lineare Gleichungssystem mit dem Matlaboperator \ lösen.

b) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `sfx = evalSpline(t, C, x)`, die den durch den Knotenvektor `t` und die Koeffizientenmatrix `C` definierten kubischen Spline an den Punkten `x` $= (x_1, x_2, ..., x_m)^T$ mit $t_0 \le x_i \le t_{n+1}$ auswertet.

c) Laden Sie das Matlabskript `drawSpline.m` von der Homepage herunter. Modifizieren Sie es so, dass es einen Spline durch alle vom Benutzer vorgegebenen Punkte zeichnet. Die Zeichnung könnte beispielsweise folgendermaßen aussehen:



Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein. Senden Sie spätestens am Tag vor Ihrem Tutorium alle Matlab-Files und alle Ergebnisse in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt05** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de**