

Angewandte Numerik 2

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 30.01.2017 bis 03.02.2017

Für dieses Übungsblatt gibt es 18 Theorie- und 10 Matlab-Punkte, sowie 14 Theorie- und 6 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 60-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 12) bei 108 Theoriepunkten und 112,8 Matlabpunkten.

Aufgabe 39 (*Programmieraufgabe: Steife Anfangswertaufgaben*)

(5M+2M+10T+3M+(2M*+3T*)+4M* Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir das skalare Modellproblem aus Beispiel 3.6.4 des Skriptes, also das Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1,$$

dessen exakte Lösung durch $y(t) = e^{\lambda t}$ gegeben ist. Dabei sind wir insbesondere am Abklingverhalten der Funktion y interessiert, also am Verhalten der Funktion y für große Werte von t .

- a) Schreiben Sie ein Matlabskript `steif`, das Näherungslösungen dieses Anfangswertproblems für $\lambda = -20$ berechnet und visualisiert. Berechnen Sie die Näherungslösungen zunächst mit dem expliziten Euler-Verfahren im Intervall $[0, 1]$ und mit der Schrittweite $h_1 = 10^{-3}$. Sie können hierzu Ihre Matlabfunktion `yk = eulerExplizit(f, y0, tk)` aus Aufgabe 30 verwenden. Plotten Sie Ihre Näherungslösung und die exakte Lösung gemeinsam in ein Schaubild.
- b) Da Sie nur am Abklingverhalten der Funktion interessiert sind, vergrößern Sie nun die Schrittweite. Wählen Sie insbesondere $h_2 = 0,01$, $h_3 = 0,05$ und $h_4 = 0,1$. Plotten Sie auch hier jeweils die Näherungslösung und die exakte Lösung in ein Schaubild. Was stellen Sie fest?
- c) Woran liegt das?
 - i) Überlegen Sie sich, welche Iterationswerte y_{k+1} das explizite Euler-Verfahren für dieses Anfangswertproblem ($y' = \lambda y$, $y_0 = y(0) = 1$, $\lambda < 0$) bei der Schrittweite h liefert. Für welche Werte von h verhält sich die Näherungslösung $(y_0, y_1, \dots, y_k, \dots)$ wie die exakte Lösung? Wie würde sich die Näherungslösung $(y_0, y_1, \dots, y_k, \dots)$ für andere Werte von h verhalten?
 - ii) Erklären Sie die numerischen Ergebnisse aus den Aufgabenteilen a) und b) mit Ihren Überlegungen aus Teil ci). Verifizieren Sie Ihre Überlegungen mit den Schrittweiten $h_5 = 0,08$ und $h_6 = 0,11$.
 - iii) Welche Iterationswerte y_{k+1} würden Sie mit dem impliziten Euler-Verfahren erhalten? Welche Bedingungen müssen Sie beim impliziten Euler-Verfahren an h stellen?
- d) Überprüfen Sie nun Ihre letzten Überlegungen numerisch. Berechnen Sie dazu die Näherungslösungen des Anfangswertproblems mit dem impliziten Euler-Verfahren. Sie können wieder die Matlabfunktion `yk = eulerImplizit(f, y0, tk, tol)` aus Aufgabe 30 verwenden. Wählen Sie zunächst die Schrittweiten $h_1 = 10^{-3}$ und $h_2 = 10^{-2}$ und plotten Sie wiederum die Lösungen.

- e) Vergrößern Sie nun wieder die Schrittweite. Verwenden Sie insbesondere auch die Schrittweite $h_4 = 10^{-1}$. Erhalten Sie eine Näherungslösung? Falls nicht, woran liegt das?

Untersuchen Sie zur Klärung dieser Frage auch, für welche Schrittweiten h die von Ihnen verwendete Fixpunktiteration $y_{k+1}^{(j+1)} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1}^{(j)})$, $j = 0, 1, 2, \dots$ zur näherungsweisen Berechnung von y_{k+1} bei unserem Modellproblem $y' = \lambda y$ die Kontraktionseigenschaft (Stichwort "Banach'scher Fixpunktsatz") erfüllt.

- f) Implementieren Sie nun, um die Fixpunktiteration zu umgehen, das implizite Euler-Verfahren speziell für unser Modellproblem $y' = \lambda y$. Dadurch erhalten Sie auch für größere Schrittweiten, zumindest für $h_4 = 10^{-1}$ und $h_7 = 1$, eine Näherungslösung. Vergrößern Sie jetzt auch das Intervall, zumindest auf $[0, 5]$, und plotten Sie wiederum Ihre Lösungen. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 40 (Stabilität)

(4T+4T+6T*+3T*+2T* Punkte)

- Berechnen und skizzieren Sie das Stabilitätsgebiet des expliziten Euler-Verfahrens.
- Berechnen und skizzieren Sie das Stabilitätsgebiet des impliziten Euler-Verfahrens.
- Berechnen und skizzieren Sie das Stabilitätsgebiet des aus der Trapezregel resultierenden impliziten Verfahrens $y_{k+1} = y_k + h \frac{1}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}))$ (vergleiche Beispiel 3.2.3 (c) des Skripts).
- Welches dieser Verfahren ist A-stabil, d. h., dass das Stabilitätsgebiet die ganze negative Halbebene der komplexen Zahlenebene umfasst (siehe Definition 3.6.13 im Skript). Welches Verfahren ist nicht A-stabil?
- Was bedeutet das jeweils für Ihre Wahl der Schrittweite h ?

Hinweise:

- Wenden Sie zunächst die Verfahrensvorschrift des jeweiligen Verfahrens auf das skalare Modellproblem $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$ an.
- Bringen Sie die so erhaltene Gleichung auf die Form $y_h(t_{j+1}) = R(\lambda h) y_h(t_j)$, wobei $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$, $z \mapsto R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion von Polynomen P und Q ist.
- Berechnen Sie das Stabilitätsgebiet $S = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$.

Hinweise:

Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein. Senden Sie spätestens am Tag vor Ihrem Tutorium **bis 18:00 Uhr** alle Matlab-Files und alle Ergebnisse in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt12** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de**