Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2017/2018
Blatt 04
09.11.2017

Angewandte Numerik 2

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 13.11.2017 bis 17.11.2017

Für dieses Übungsblatt gibt es 22 Theorie- und 9 Matlab-Punkte, sowie 9 Theorie- und 3 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 60-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 04) bei 56,4 Theoriepunkten und 33,6 Matlabpunkten.

Aufgabe 14 *(Gradienten-Verfahren)* (7T* Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie zwei Schritte des Gradienten-Verfahrens mit dem Startwert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch.

Aufgabe 15 *(Programmieraufgabe: Gradienten-Verfahren für lineare Gleichungssysteme)* (6M+3M+3M*+2T* Punkte)

a) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `xk = gradVerfahrenLinear(A, b, x0, maxIt, tol)`, die mit dem Gradienten-Verfahren das lineare Gleichungssystems $Ax = b$ iterativ löst. `x0` soll dabei der Startwert und `maxIt` eine obere Schranke für die Anzahl der durchgeführten Iterationen sein. `tol` soll die Genauigkeit der Lösung über ein geeignetes Abbruchkriterium steuern. Ihre Matlabfunktion soll im Vektor `xk` alle Iterationswerte $x^{(k)}$ zurück geben.

b) Berechnen Sie mit Ihrer Matlabfunktion `gradVerfahrenLinear` näherungsweise das Minimum der quadratischen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie als Startwert $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und zeichnen Sie den Verlauf der Iteration in ein Schaubild.

c) Ergänzen Sie Ihr Schaubild durch einen zweidimensionalen Plot der Funktion f und zeichnen Sie Höhenlinien in Ihr Schaubild ein. Achten Sie auf sinnvolle Achsenabschnitte und wählen Sie geeignete Höhenlinien. Sie können beispielsweise die Matlabfunktionen `meshgrid`, `pcolor`, `colorbar`, `shading` und `contour` verwenden.

d) Wie verläuft die Iteration des Gradientenverfahrens hinsichtlich der Höhenlinien?

Aufgabe 16 *(Konvergenzrate des Gradienten-Verfahrens)* (1T+8T+1T+2T+2T* Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$A\,x = b \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a \gg 1$. Auf dieses Gleichungssystem wollen wir das Gradienten-Verfahren mit dem Startwert $x_0 = (a, 1)^T$ anwenden.

a) Wie lautet die exakte Lösung x^* dieses Gleichungssystems?

b) Zeigen Sie, dass für die Iterierten $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})^T$ des Gradienten-Verfahrens

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ -x_2^{(k)} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \rho = \frac{a-1}{a+1}$$

gilt.
Hinweis: Sie können diese Behauptung mit vollständiger Induktion zeigen.

c) Geben Sie die Konvergenzrate $c^{(k)}$ im k-ten Schritt an, die definiert ist als $c^{(k)} = \frac{\|x^{(k)} - x^*\|}{\|x^{(k-1)} - x^*\|}$.

d) Wie lauten die Konvergenzraten $c^{(k)}$ für $a = 1$ und für $a = 1000$? Was bedeuten diese für die Iterationen des Gradienten-Verfahrens?

e) Zeichnen Sie für $a = 20$ die ersten Iterierten $x_0, \dots, x_5$ in ein zweidimensionales Koordinatensystem. Achten Sie auf eine geeignete Skalierung der Achsen.

Aufgabe 17 *(Energie-Skalarprodukt)* (8T Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix.
Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$(\cdot,\cdot)_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad (x,y)_A := x^T A y$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein. Senden Sie **spätestens 24 Stunden vor Ihrem Tutorium** alle Matlab-Files und alle Ergebnisse in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt04** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de**.