Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2017/2018
Blatt 10
12.01.2018

Angewandte Numerik 2

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 15.01.2018 bis 19.01.2018

Für dieses Übungsblatt gibt es 14 Theorie- und 17 Matlab-Punkte, sowie 13 Theorie- und 4 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 60-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 10) bei 102,0 Theorie- und 114,6 Matlabpunkten.

Prüfungstermine:

Herr Professor Urban bietet (auch für andere Vorlesungen) am Dienstag, 27.02.2018, am Freitag, 16.03.2018, am Dienstag, 03.04.2018 und am Freitag, 06.04.2018 jeweils um 8:00 Uhr, 8:45 Uhr, 9:30 Uhr, 10:15 Uhr, 11:00 Uhr und um 11:45 Uhr Termine für mündliche Prüfungen an. Die Termine können bei Frau Hildebrand, Telefon (0731) 50-23536, reserviert werden.

Tausch von Vorlesung und Übung:

Am **Montag, 29.01.2018** findet statt der Übungen eine Vorlesung statt.
Achtung: Die Vorlesung beginnt bereits um **<u>14 Uhr c.t.</u>**

Aufgabe 35 *(Mehrschrittverfahren (Milne-Simpson), Konsistenzordnung, Konvergenz)* (7T+3T Punkte)

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung (siehe Definition 3.7.5 im Skript) des Milne-Simpson-Verfahrens mit Schrittzahl $k = 2$:

$$y^{j+1} = y^{j-1} + \frac{h}{3}(f^{j+1} + 4f^j + f^{j-1})$$

und prüfen Sie, ob es konvergent (siehe Definition 3.7.15 im Skript) ist.

Hinweise:

i) Zeigen Sie zunächst die Konsistenz und die Konsistenzordnung ($p = 4$) des linearen Mehrschrittverfahrens.

ii) Dazu können Sie Lemma 3.7.11 und Satz 3.7.12 aus dem Skript verwenden. Gehen Sie davon aus, dass die Startwerte („Anlaufstück“) geeignet gewählt wurden.

iii) Zeigen Sie anschließend mit Satz 3.7.16 und Bemerkung 3.7.17 durch Überprüfung der Wurzelbedingung (Bemerkung 3.7.14) die Konvergenz.

Aufgabe 36 *(Konstruktion eines expliziten Zweischrittverfahrens)* (4T*+2T*+2T*+1T* Punkte)

Konstruieren Sie ein explizites Zweischrittverfahren der Form

$$y^{j+2} + \alpha_1 y^{j+1} + \alpha_0 y^j = h\,(\beta_0 f(t_j, y^j) + \beta_1 f(t_{j+1}, y^{j+1})).$$

a) Bestimmen Sie dazu zunächst α_0, β_0 und β_1 in Abhängigkeit von α_1 so, dass das Verfahren mindestens die Ordnung 2 hat.

b) Für welche Werte von α_1 ist dieses Verfahren dann konvergent?

c) Lässt sich α_1 so wählen, dass sich ein Verfahren der Konsistenzordnung 3 ergibt?

d) Ist dieses Verfahren konvergent?

Aufgabe 37 *(Programmieraufgabe: Konvergenz von expliziten Mehrschrittverfahren)* (9M+5M+2T+3M+2T+4M*+4T* Punkte)

In dieser Aufgabe sollen die Ergebnisse der vorigen Aufgabe 36 numerisch überprüft werden. Dazu betrachten wir zunächst das konstruierte Zweischrittverfahren mit der Konsistenzordnung 3:

$$y^{j+2} + 4y^{j+1} - 5y^j = h\,(4f^{j+1} + 2f^j). \tag{1}$$

a) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `[yk, tk] = explLinMehrSchritt(f, y0, t0, tEnd, N, a, b, anlauf)`, die für einen gegebenen Startwert $y^0 \in \mathbb{R}^n$ die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y^0$$

mit einem expliziten linearen Mehrschritt-Verfahren näherungsweise berechnet.

Die Parameter sind weitgehend analog zu den bisher programmierten Einschritt-Verfahren: `f` ist die Funktion f als *function handle*, `y0` ist der Startwert $y^0 \in \mathbb{R}^n$, `t0` ist der Anfangszeitpunkt, `tEnd` ist der Zeitpunkt, bis zu dem eine Näherungslösung berechnet werden soll, `N` ist die Anzahl der Iterationen, die zwischen `t0` und `tEnd` durchgeführt werden sollen, `a` ist der Spaltenvektor $a = (a_0, \dots, a_k)$ der Koeffizienten des Mehrschritt- (k-Schritt-)Verfahrens, `b` ist der Spaltenvektor $b = (b_0, \dots, b_{k-1})$ der Koeffizienten der (expliziten) linearen Verfahrensfunktion F und `anlauf` ist eine Funktion (als *function handle*) zur Berechnung der Näherungswerte $y^1, \dots, y^{k-1}$ im Anlaufstück. Der Rückgabewert `yk` ist der Vektor der einzelnen Näherungswerte y^k und `tk` ist das Gitter mit den diskreten Zeitpunkten t_k.

Die Funktion `anlauf` soll die aus den Einschritt-Verfahren bekannten Parameter und Rückgabewerte haben, also beispielsweise durch `yk = anlauf(f, y0, tk)` aufgerufen werden können. `f` ist dabei die Funktion f als *function handle*, `y0` ist der Startwert $y^0 \in \mathbb{R}^n$ und `tk` ist ein Gitter mit den diskreten Zeitpunkten t_k aus dem Anlaufstück. Der Rückgabewert `yk` ist der Vektor der einzelnen Näherungswerte y^k des Anlaufstücks.

b) Schreiben Sie ein Matlabskript `mainA37`, das die Anfangswertaufgabe

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \tag{2}$$

mit obigem Zweischrittverfahren (1) löst. Verwenden Sie für die Werte im Anlaufstück die exakten Anfangsdaten $y^0 = 1$ und $y^1 = e^h$. Plotten Sie Ihre Näherungslösung für die Schrittweite $h = 1/10$ und die exakte Lösung auf dem Intervall $[t_0, t_{End}] = [0, 1]$ in ein Schaubild.

c) Was stellen Sie fest?

d) Plotten Sie nun in drei weitere Schaubilder die numerischen Lösungen für die Schrittweiten $h = 1/20$, $h = 1/40$ und $h = 1/80$ sowie jeweils die exakte Lösung auf dem Intervall $[t_0, t_{End}] = [0, 1]$. Begrenzen Sie den Bereich der dargestellten Werte mit `xlim ([0,1])` und `ylim ([0,5])`.

e) Interpretieren Sie das erhaltene Ergebnis.

f) Lösen Sie nun die Anfangswertaufgabe (2) auch mit einem konvergenten Zweischrittverfahren der Konsistenzordnung 2. Wählen Sie dazu die Koeffizientenvektoren a und b entsprechend Aufgabe 36, Teil b). Verwenden Sie die Schrittweiten $h = 1/20$, $h = 1/40$ bis $h = 1/2560$.

   Berechnen Sie für jede Schrittweite h den Maximalwert

$$e_h = \max_j \|y_h^j - y(t_j)\| \tag{3}$$

   des globalen Diskretisierungsfehlers, wobei y_h^j die mit der Schrittweite h berechneten Näeherungswerte für $y(t_j)$ sind. Geben Sie auch die numerischen Konvergenzordnungen

$$p_h = \frac{\ln\left(\frac{e_h}{e_{\frac{h}{2}}}\right)}{\ln(2)} \quad (h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \ldots, \frac{1}{1280}),$$

   die sich aus Ihren numerischen Werten ergeben, aus.

g) Variieren Sie α_1 und damit die Koeffizienten des Mehrschrittverfahrens, und zwar sowohl innerhalb als auch außerhalb des in Aufgabe 36, Teil b) berechneten Konvergenzbereichs. Was können Sie nun beobachten?

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein. Senden Sie **spätestens 24 Stunden vor Ihrem Tutorium** alle Matlab-Files und alle Ergebnisse in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt10** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de**.