Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2017/2018
Blatt 11
20.01.2018

Angewandte Numerik 2

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 22.01.2018 bis 26.01.2018

Für dieses Übungsblatt gibt es 14 Theorie- und 19 Matlab-Punkte, sowie 6 Theorie- und 7 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 60-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 11) bei 110,04 Theorie- und 126,0 Matlabpunkten.

Prüfungstermine:
Herr Professor Urban bietet (auch für andere Vorlesungen) am Dienstag, 27.02.2018, am Freitag, 16.03.2018, am Dienstag, 03.04.2018 und am Freitag, 06.04.2018 jeweils um 8:00 Uhr, 8:45 Uhr, 9:30 Uhr, 10:15 Uhr, 11:00 Uhr und um 11:45 Uhr Termine für mündliche Prüfungen an. Die Termine können bei Frau Hildebrand, Telefon (0731) 50-23536, reserviert werden.

Tausch von Vorlesung und Übung:
Am **Montag, 29.01.2018** findet statt der Übungen eine Vorlesung statt.
Achtung: Die Vorlesung beginnt bereits um **14 Uhr c.t.**

Aufgabe 38 *(Programmieraufgabe: Adams-Bashforth-Verfahren, Anlaufstück)* (5M+2M*+3M* Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, wie sich das zur Berechnung der Näherungswerte des Anlaufstücks verwendete Einschrittverfahren auf die Konvergenzordnung bei Mehrschrittverfahren auswirkt. Dazu werden wir das Adams-Bashforth-Verfahren

$$y_{j+4} - y_{j+3} = \frac{h}{24}\big(55 f(t_{j+3}, y_{j+3}) - 59 f(t_{j+2}, y_{j+2}) + 37 f(t_{j+1}, y_{j+1}) - 9 f(t_j, y_j)\big)$$

und zur Berechnung der Startwerte im Anlaufstück

i) das explizite Euler-Verfahren,
ii) das verbesserte Euler-Verfahren,
iii) das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung und
iv) die exakten Werte

verwenden. Sie können Ihre Matlabfunktion `[yk, tk] = explLinMehrSchritt(f, y0, t0, tEnd, N, a, b, anlauf)` aus Aufgabe 37 von Blatt 10 mit den entsprechenden Parametern aufrufen.

a) Betrachten Sie zunächst die Anfangswertaufgabe

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

aus Aufgabe 37 und berechnen Sie im Intervall $[t_0, t_{End}] = [0, 1]$ die Diskretisierungsfehler jeweils zu den Schrittweiten 1/20, 1/40, 1/80 bis 1/5120 und den Varianten i) bis iv) für das Anlaufstück.

Plotten Sie in ein Schaubild für die vier Anlaufstück-Varianten jeweils die globalen Diskretisierungsfehler über den Schrittweiten. Was beobachten Sie hinsichtlich der Konvergenzordnung?

b) Untersuchen Sie, ebenfalls im Intervall $[t_0, t_{End}] = [0, 1]$, auch die Konvergenzordnungen für die Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = -2ty(t)^2, \qquad y(0) = 1,$$

deren exakte Lösung durch $y(t) = \frac{1}{t^2+1}$ gegeben ist.

c) Testen Sie Ihre Implementierung auch am folgenden System

$$\begin{array}{rcrrr} y_1' & = & & y_2 & -y_3, \\ y_2' & = & -2y_1 & +3y_2 & -y_3, \\ y_3' & = & -y_1 & +y_2 & +y_3 \end{array}$$

mit der Anfangsbedingung $y_1(0) = 1, y_2(0) = -1, y_3(0) = 2$, dessen exakte Lösung gegeben ist durch

$$\begin{array}{rcrrr} y_1(t) & = & e^t & -4te^t, & \\ y_2(t) & = & e^t & -4te^t & -2e^{2t}, \\ y_3(t) & = & 4e^t & & -2e^{2t}. \end{array}$$

Aufgabe 39 *(Grenzen des einfachen Schießverfahrens)* (5T+3T+4T Punkte)

Zur Lösung des Randwertproblems (RWP)

$$y''(t) = 100y(t), \qquad y(0) = 1, \qquad y(3) = e^{-30}, \tag{1}$$

mittels des einfachen Schießverfahrens betrachtet man die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y''(t) = 100y(t), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = s. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung $y(t; s)$ der Anfangswertaufgabe (2) und finden Sie $\hat{s}$, so dass $y(3; \hat{s}) = e^{-30}$. Wie lautet dann die Lösung $y(t) = y(t; \hat{s})$ des Randwertproblems (1)?
Hinweis:
Wählen Sie den Lösungsansatz $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und berechnen Sie die Lösungen λ_1 und λ_2 der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 100 = 0$. Für die Lösung $y(t)$ der Anfangswertaufgabe (2) gilt nun $y(t; s) = c_1(s)\, e^{\lambda_1 t} + c_2(s)\, e^{\lambda_2 t}$, wobei Sie $c_1(s)$ und $c_2(s)$ aus den Anfangswerten bestimmen können.

b) Sie müssen davon ausgehen, dass $\hat{s}$, beispielsweise aufgrund von Rundungsfehlern, nicht exakt dargestellt werden kann, sondern mit einer (relativen) Störung ε behaftet ist.

   Wie lautet dann die gestörte Lösung $y(3; (1 + \varepsilon)\, \hat{s})$?

c) Ist ein einfaches Schießverfahren zur Lösung des obigen Randwertproblems geeignet? Begründen Sie Ihre Antwort.

   Hinweis: Berechnen Sie zur Beantwortung dieser Frage den relativen Fehler $\left| \frac{y(3;\hat{s}) - y(3;(1+\varepsilon)\,\hat{s})}{y(3;\hat{s})} \right|$.

Aufgabe 40 *(Programmieraufgabe: Einfaches Schießverfahren)* (6M+3M+2T+5M*+2M* Punkte)

a) Implementieren Sie das einfache Schießverfahren zur Lösung des Randwertproblems

$$y''(x) = f(x, y, y'), \qquad y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta,$$

in einer Matlabfunktion. Bestimmen Sie den Parameter $\hat{s}$ mit einem Quasi-Newton-Verfahren. Wählen Sie einen geeigneten Startwert für s. Zur Lösung der Anfangwertaufgabe können Sie ein geeignetes Verfahren aus früheren Aufgaben verwenden.

   Überlegen Sie sich, welche Parameter Ihre Matlabfunktion benötigt und welche Werte sie an den Aufrufer zurück geben sollte.

b) Testen Sie Ihr Matlabprogramm für die Randwertprobleme

   i) $y''(t) = 4(y(t) - t), \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 2$ und
   ii) $y''(t) = y'(t) + 2y(t) + \cos(t), \qquad y(0) = -\frac{3}{10}, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{10}$.

   Veranschaulichen Sie Ihre Ergebnisse graphisch.

   Hinweis:
   Die exakten Lösungen der obigen Randwertprobleme sind gegeben durch

   i) $y(t) = t + \frac{1}{e^2-e^{-2}}e^{2t} - \frac{1}{e^2-e^{-2}}e^{-2t}$ und
   ii) $y(t) = -\frac{3}{10}\cos(t) - \frac{1}{10}\sin(t)$.

c) Wie verläuft die gefundene Näherungslösung im Vergleich zur exakten Lösung. Wo, also zu welchen Zeitpunkten $t \in (t_0, t_{End}]$, ist die Abweichung zwischen der gefundenen Näherungslösung und der exakten Lösung am kleinsten, wo ist sie am größten?

d) Untersuchen Sie, welchen Einfluss unterschiedliche Verfahren zur Lösung der Anfangswertaufgabe auf das Gesamtergebnis haben. Betrachten Sie insbesondere das explizite Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun sowie das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung. Wie wirken sich unterschiedliche Schrittweiten aus? Stellen Sie Ihre Untersuchungsergebnisse analog zu Aufgabe 38 graphisch dar.

e) Wie wirkt sich ein anderer Startwert für s aus? Verändern Sie den Startwert auch deutlich.

Aufgabe 41 *(Wahr oder falsch?)* (6T* Punkte)

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jedes Randwertproblem hat eine eindeutige Lösung.

b) Ob ein Randwertproblem eine Lösung besitzt, kann von den Randbedingungen abhängen.

c) Beim einfachen Schieß-Verfahren wird ein Verfahren zur Lösung einer Anfangswertaufgabe eingesetzt.

d) Beim einfachen Schieß-Verfahren müssen iterativ in der Regel mehrere Näherungslösungen von Anfangswertaufgaben berechnet werden.

e) Das Einfach-Schieß-Verfahren kann leichter parallelisiert werden als das Mehrfach-Schieß-Verfahren, da beim Einfach-Schieß-Verfahren keine Stetigkeitsbedingungen auftreten, die bei der Parallelisierung gesondert berücksichtigt werden müssen.

f) Die Idee der Schieß-Verfahren kann leicht auf raum-artige Randwertprobleme übertragen werden.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein. Senden Sie **spätestens 24 Stunden vor Ihrem Tutorium** alle Matlab-Files und alle Ergebnisse in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt11** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de**.