Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2017/2018
Blatt 12
27.01.2018

Angewandte Numerik 2

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 29.01.2018 bis 02.02.2018

Für dieses Übungsblatt gibt es 22 Theorie- und 16 Matlab-Punkte, sowie 7 Theorie- und 8 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 60-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 12) bei 123,6 Theorie- und 135,6 Matlabpunkten.

Prüfungstermine:

Herr Professor Urban bietet (auch für andere Vorlesungen) am Dienstag, 27.02.2018, am Freitag, 16.03.2018, am Dienstag, 03.04.2018 und am Freitag, 06.04.2018 jeweils um 8:00 Uhr, 8:45 Uhr, 9:30 Uhr, 10:15 Uhr, 11:00 Uhr und um 11:45 Uhr Termine für mündliche Prüfungen an. Die Termine können bei Frau Hildebrand, Telefon (0731) 50-23536, reserviert werden.

Tausch von Vorlesung und Übung:

Am **Montag, 29.01.2018** findet statt der Übungen eine Vorlesung statt.
Achtung: Die Vorlesung beginnt bereits um **14 Uhr c.t.**

Aufgabe 42 *(Finite-Differenzen-Methode: Aufstellen der Matrix und der rechten Seite)*
(4T+4T+2T+4T* Punkte)

Wir betrachten das Randwertproblem mit homogenen Randbedingungen

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \qquad \text{mit} \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

Zur Lösung mit der Finite-Differenzen-Methode führen wir auf $[0,1]$ ein äquidistantes Gitter

$$\Delta_h := \left\{ x_j \;\middle|\; x_j = jh;\ j = 0,\dots,m;\ h = \frac{1}{m} \right\}$$

ein und approximieren u durch $\{u_j\}_{j=0}^m$ mit $u_j \approx u(x_j)$ für $j = 0,\dots,m$.
Ersetzen wir nun die zweite Ableitung u'' an den inneren Gitterpunkten x_j durch den zentralen Differenzenquotienten

$$u''(x_j) \approx \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2}, \qquad j = 1,\dots,m-1,$$

so erhalten wir aus (1) ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A^{(m)}u^{(m)} = f^{(m)} \qquad \text{mit} \qquad u^{(m)} = (u_1,\dots,u_{m-1})^T, \tag{2}$$

mit dem wir die Näherungswerte u_j bestimmen können.

a) Geben Sie die Matrix $A^{(m)}$ und den Vektor $f^{(m)}$ explizit an.

b) Betrachten wir nun das Randwertproblem mit den allgemeineren Randbedingungen

$$u(0) = \alpha_0 \qquad \text{und} \qquad u(1) = \alpha_1.$$

Wie muss die rechte Seite $f^{(m)}$ des linearen Gleichungssystems (2) angepasst werden?

c) Erweitern Sie den Lösungsvektor $u^{(m)}$ um die Lösung u_0 und u_m auf dem Rand. Wie lauten dann die Matrix $\tilde{A}^{(m)}$ und der Vektor $\tilde{f}^{(m)}$ des erweiterten linearen Gleichungssystems

$$\tilde{A}^{(m)}\tilde{u}^{(m)} = \tilde{f}^{(m)} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{u}^{(m)} = (u_0, \ldots, u_m)^T?$$

d) Nun soll für eine Funktion $s : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto s(x)$ das Randwertproblem

$$-u''(x) + s(x)\,u(x) = f(x) \qquad \text{mit} \qquad u(0) = \alpha_0,\; u(1) = \alpha_1 \tag{3}$$

betrachtet werden. Geben Sie auch für dieses Randwertproblem die Matrix $\hat{A}^{(m)}$ und den Vektor $\hat{f}^{(m)}$ des resultierenden linearen Gleichungssystems

$$\hat{A}^{(m)}\hat{u}^{(m)} = \hat{f}^{(m)} \qquad \text{mit} \qquad \hat{u}^{(m)} = (u_1, \ldots, u_{m-1})^T$$

an.

Aufgabe 43 *(Die Finite-Differenzen-Methode und Polynome)* (3T+2T+1T+3T* Punkte)

Betrachten Sie ein beliebiges Polynom p dritten Grades, also

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{mit } a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$$

Sei $h > 0$ und $\Delta_h := \left\{x_j \;\middle|\; x_j = jh;\ j = 0, \ldots, m;\ h = \frac{1}{m}\right\}$ ein Gitter.

a) Berechnen Sie den zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{p(x_{j-1}) - 2p(x_j) + p(x_{j+1})}{h^2} = -(L_hp)(x_j), \qquad j = 1, \ldots, m-1.$$

b) Sei nun ein Randwertproblem gegeben, dessen Lösung u ein Polynom dritten Grades ist. Wie groß ist der lokale Abbruchfehler, wenn Sie eine Näherungslösung des Randwertproblems mit der Finite-Differenzen-Methode berechnen? Hängt der lokale Abbruchfehler von der Gitterweite ab?

c) War dieser lokale Abbruchfehler aufgrund von Aussagen der Vorlesung / des Skriptes zu erwarten? Begründen Sie Ihre Aussage!

d) Betrachten Sie jetzt ein Randwertproblem, dessen Lösung u durch ein Polynom vierten Grades gegeben ist. Berechnen Sie auch für diesen Fall den lokalen Abbruchfehler. Hängt dieser von der Gitterweite ab?

Geben Sie auch eine obere Schranke für den (globalen) Diskretisierungsfehler an.

Aufgabe 44 *(Programmieraufgabe: Finite-Differenzen-Methode)*
(4M+3M+(3M+2T)+(4M+4T)+2M+8M* Punkte)

a) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `uj = fdm(f, xj)`, die eine Lösung des Randwertproblems (1) mit der Finite-Differenzen-Methode näherungsweise berechnet. `f` ist dabei eine Funktion für die rechte Seite des Randwertproblems, `xj` ein äquidistantes Gitter und `uj` die berechnete diskrete Näherungslösung. Das auftretende lineare Gleichungssystem dürfen Sie mit dem Matlaboperator \ lösen.

b) Schreiben Sie ein Matlabskript `testFdm`, das Ihre Matlabfunktion `uj = fdm(f, xj)` mit der Funktion $f(x) = 1$ und den Schrittweiten $h = 2^{-1}, \ldots, 2^{-8}$ testet. Plotten Sie für jede Schrittweite die Näherungslösung und die exakte Lösung $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2}$ in ein Schaubild.

c) Erweitern Sie Ihr Matlabskript `testFdm` und berechnen Sie auch den lokalen Abbruchfehler $\tau_h(x_j)$. Welchen Wert hat der lokale Abbruchfehler im Beispiel aus Aufgabenteil b)? Erklären Sie Ihre Beobachtung. Berücksichtigen Sie dabei auch das Ergebnis der Aufgabe 43 und die Konsistenzordnung der Finite-Differenzen-Methode.

d) Testen Sie Ihre Matlabfunktion `uj = fdm(f, xj)` auch mit den Funktionen

   i) $f(x) = 6x - 2$ (exakte Lösung: $u(x) = -x^3 + x^2$) und
   ii) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{12}$ (exakte Lösung: $u(x) = -\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^2$).

   und den Schrittweiten aus Aufgabenteil b). Wie groß ist der lokale Abbruchfehler jetzt? Passt Ihr numerisches Ergebnis zu Ihren theoretischen Überlegungen aus Aufgabe 43?

e) Plotten Sie die maximalen lokalen Abbruchfehler doppelt logarithmisch über der Anzahl der Elemente im Gitter. Welche Konsistenzordnung der Finiten-Differenzen-Methode ergibt sich aus Ihren numerischen Experimenten?

f) Erweitern Sie nun Ihre Matlabfunktion `fdm` zu `uj = fdmAllgemein(f, alpha0, alpha1, xj, s)` und Ihr Matlabskript `testFdm`, so dass Sie auch Lösungen des allgemeineren Randwertproblems (3) aus Aufgabe 42 d) berechnen können. Testen Sie Ihre Matlabfunktion mit

   i) $u(0) = 1,\ u(1) = \frac{3}{2},\ s(x) = 0,\ f(x) = 1$ (exakte Lösung: $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$),
   ii) $u(0) = 1,\ u(1) = \frac{3}{2},\ s(x) = \frac{1}{x},\ f(x) = -\frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{x}$ (exakte Lösung: $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$),
   iii) $u(0) = 0,\ u(1) = 0,\ s(x) = x,\ f(x) = (4\pi^2 + x)\sin(2\pi x)$ (exakte Lösung: $u(x) = \sin(2\pi x)$),
   iv) $u(0) = 0,\ u(1) = -1,\ s(x) = x,\ f(x) = (\frac{9}{4}\pi^2 + x)\sin(\frac{3}{2}\pi x)$ (exakte Lösung: $u(x) = \sin(\frac{3}{2}\pi x)$).

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein. Senden Sie **spätestens 24 Stunden vor Ihrem Tutorium** alle Matlab-Files und alle Ergebnisse in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt12** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de**.