Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Angewandte Numerik 2

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 05.02.2018 bis 09.02.2018

Für dieses Übungsblatt gibt es 24 Theorie- und 13 Matlab-Punkte, sowie 7 Theorie- und 4 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 60-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 13) bei 138,0 Theorie- und 143,4 Matlabpunkten.

Prüfungstermine:

Herr Professor Urban bietet (auch für andere Vorlesungen) am Dienstag, 27.02.2018, am Freitag, 16.03.2018, am Dienstag, 03.04.2018 und am Freitag, 06.04.2018 jeweils um 8:00 Uhr, 8:45 Uhr, 9:30 Uhr, 10:15 Uhr, 11:00 Uhr und um 11:45 Uhr Termine für mündliche Prüfungen an. Die Termine können bei Frau Hildebrand, Telefon (0731) 50-23536, reserviert werden.

Aufgabe 45 *(Programmieraufgabe: Finite-Differenzen-Methode mit variablen Koeffizienten)*
(4T+6T+3T+10M+(3M+4M*) Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir die Implementierung der Finite-Differenzen-Methode aus Aufgabe 44 des letzten Übungsblattes 12 verallgemeinern. Wir betrachten jetzt Randwertprobleme der Art

$$Lu(x) := -\big(\alpha(x)u'(x)\big)' + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a,b) \quad \text{mit } u(a) = d_a, u(b) = d_b. \tag{1}$$

Dabei seien $\alpha, \beta, \gamma \in C^0([a,b])$.
Zur Diskretisierung führen wir auf $[a,b]$ wieder ein äquidistantes Gitter

$$\Delta_h := \left\{ x_j \;\middle|\; x_j = a + jh;\ j = 0,\dots,m;\ h = \frac{b-a}{m} \right\}$$

ein und approximieren u auf dem Gitter Δ_h durch $\{u_j\}_{j=0}^m$ mit $u_j \approx u(x_j)$ für $j = 0,\dots,m$.
Das resultierende Gleichungssystem habe die Form

$$A_h u_h = f_h \qquad \text{mit} \qquad u_h = (u_1,\dots,u_{m-1})^T.$$

Die Matrix $A_h = D_h + K_h + R_h \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}$ setzt sich dabei aus den Matrizen D_h, K_h und R_h zusammen, die wir aus den einzelnen Termen des Randwertproblems (1) erhalten.

a) Überlegen Sie sich, wie die aus dem Konvektionsterm $\beta(x)u'(x)$ resultierende Matrix K_h aussieht. Nähern Sie dazu die Ableitung u' an den inneren Gitterpunkten durch den zentralen Differenzenquotienten

$$u'(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}, \qquad j = 1,\dots,m-1$$

an. Welchen Beitrag liefert der Konvektionsterm für die rechte Seite f_h des linearen Gleichungssystems?

b) Leiten Sie die aus dem Diffusionsterm $-(\alpha(x)u'(x))'$ resultierende Matrix D_h her. Führen Sie dazu ein verschobenes Gitter $x_{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}),\ \ j = 0, \dots, m-1$ ein und approximieren Sie den Fluss $\alpha(x_{j+\frac{1}{2}})u'(x_{j+\frac{1}{2}})$ an den Gitterstellen des verschobenen Gitters durch einen zentralen Differenzenquotienten mit Schrittweite $h/2$. Ersetzen Sie auch die äußere Ableitung $(\alpha(x_j)u'(x_j))'$ an den Gitterpunkten des ursprünglichen Gitters Δ_h durch einen zentralen Differenzenquotienten mit Schrittweite $h/2$. Was müssen Sie für die rechte Seite f_h des linearen Gleichungssystems beachten?

c) Geben Sie das komplette resultierende Gleichungssystem $A_h u_h = f_h$ mit $u_h = (u_1, \dots, u_{m-1})^T$ an.

d) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `uj = fdmVar(f, alpha, beta, gamma, xj, da, db)`, die eine Lösung des Randwertproblems (1) mit der Finite-Differenzen-Methode näherungsweise berechnet. `f` ist dabei eine Funktion für die rechte Seite des Randwertproblems, `alpha`, `beta` und `gamma` sind die variablen Koeffizienten (als function handle), `xj` ist ein äquidistantes Gitter, `da0` und `db` sind die Werte auf dem Rand und `uj` ist die berechnete diskrete Näherungslösung. Das auftretende lineare Gleichungssystem dürfen Sie mit dem Matlaboperator \ lösen.

e) Schreiben Sie ein Matlabskript `testFdmVar`, das Ihre Matlabfunktion `uj = fdmVar(f, alpha, beta, gamma, xj, da, db)` mit den folgenden Randwertproblemen testet:

   i) $u'' + u = 0, \quad [a, b] = [0, \frac{\pi}{2}], \quad u(0) = 0, \quad u(\frac{\pi}{2}) = 1.$ (Die exakte Lösung ist $u(x) = sin(x)$.) Testen Sie Ihre Funktion `fdmVar` mit verschiedenen Schrittweiten.

   ii) $-\varepsilon u'' + u' = 0, \quad [a, b] = [0, 1], \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$ (Die exakte Lösung ist $u_\varepsilon(x) = \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}} - e^{\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1}$.) Testen Sie Ihre Funktion `fdmVar` mit den Schrittweiten $h_1 = 10^{-3}$, $h_2 = 10^{-2}$ und $h_3 = 10^{-1}$ sowie jeweils $\varepsilon \in \{1; 0.1; 0.01\}$. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 46 *(Sobolev-Norm)* (5T* Punkte)

Zeigen Sie, dass durch

$$\|u\|_{H^1} := \sqrt{\|u\|_{L_2}^2 + \|u'\|_{L_2}^2}$$

eine Norm auf $H_0^1(0, 1)$ definiert wird.

Hinweis:
Sie können beispielsweise zeigen, dass durch $(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L_2} + (u', v')_{L_2}$ ein Skalarprodukt auf $H_0^1(0, 1)$ definiert ist. Denn dann ist die durch das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{H^1}$ induzierte Norm $\|u\|_{H^1} := \sqrt{(u, u)_{H^1}}$ eine Norm.

Aufgabe 47 *(Galerkin-Verfahren)* (3T+3T+5T+2T* Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe die allgemeine Form linearer Randwertprobleme zweiter Ordnung in 1D

$$-\big(\alpha(x)u'(x)\big)' + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1) \quad \text{mit } u(0) = u(1) = 0.$$

Dabei seien $\alpha, \beta, \gamma \in C^0([0, 1])$ und $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$.

Gesucht ist (schwache Formulierung) eine Funktion u aus dem Test- und Ansatzraum $V := H_0^1(0, 1)$ mit

$$a(u, v) = (f, v), \qquad \forall v \in V, \tag{2}$$

mit der Bilinearform

$$a(u, v) := \int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)\, dx + \int_0^1 \beta(x)u'(x)v(x)\, dx + \int_0^1 \gamma(x)u(x)v(x)\, dx$$

und der Linearform

$$F(v) := (f,v) := \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Zur Diskretisierung führen wir auf $[0,1]$ ein äquidistantes Gitter

$$\Delta_h := \left\{ x_i \;\middle|\; x_i = ih;\; i = 0,\dots,m;\; h = \frac{1}{m} \right\}$$

ein und betrachten die darauf definierten Hutfunktionen $(i = 1,\dots,m-1)$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x_i < x \le x_{i+1} \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

a) Die gesuchte Lösung u muss die Bedingung (2) für alle v erfüllen, also auch für die Hutfunktionen φ_i, $i = 1,\dots,m-1$. Setzen Sie die Hutfunktionen φ_i für v in (2) ein und geben Sie die daraus resultierenden $m-1$ Bedingungen an u in Integralform an. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Hutfunktionen jeweils nur auf zwei Teilintervallen von 0 verschieden sind.

b) Nehmen Sie an, dass die Näherungslösung u_h der gesuchten Funktion u sich als Linearkombination der Hutfunktionen φ_i schreiben lässt, also

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{m-1} u_j \varphi_j(x).$$

Wie lauten jetzt die Bedingungen an u_h? Berücksichtigen Sie auch hier, dass die Hutfunktionen jeweils nur auf zwei Teilintervallen von 0 verschieden sind.

c) Betrachten Sie nun den Spezialfall $\alpha(x) = 1,\; \beta(x) = \gamma(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.
Wie lauten die Bedingungen an u_h für diesen Spezialfall? Geben Sie diese als lineares Gleichungssystem

$$A_{(m-1)}u_{(m-1)} = f_{(m-1)} \qquad \text{mit} \qquad u_{(m-1)} = (u_1,\dots,u_{m-1})^T$$

an.

d) Vergleichen Sie dieses lineare Gleichungssystem mit dem linearen Gleichungssystem, das Sie in Aufgabe 42 vom letzten Übungsblatt 12 für die Finite-Differenzen-Methode erhalten haben.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein. Senden Sie **spätestens 24 Stunden vor Ihrem Tutorium** alle Matlab-Files und alle Ergebnisse in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt13** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de**.