Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2017/2018

Übungsblatt 10

Besprechung 10.1.2018.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

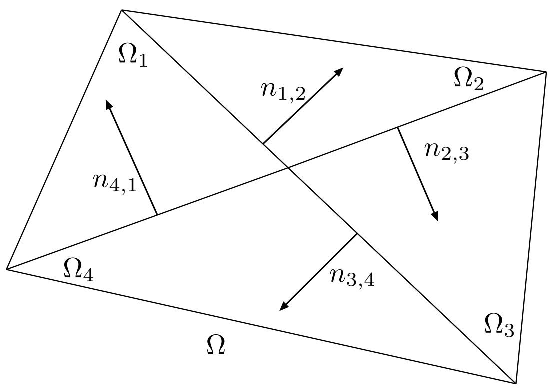
Lösen Sie vollständig Aufgabe 2 vom Blatt 9. Sie können hierzu als Hilfestellung die Musterlösung vom Blatt 5 verwenden. Laden Sie sich die entsprechenden Dateien von `moodle` herunter.

Aufgabe 2 ($H(\mathrm{div},\Omega)$) (10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein polygonales Gebiet, das in Teilgebiete (z.B. Dreiecke) $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1,..,m$ geteilt ist mit

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{\Omega}_i \quad \text{und} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \ (i \neq j).$$

Darüber hinaus seien Ω_i, $i = 1,..,m$ reguläre Gebiete, in denen der Gauß'sche Integralsatz gilt.
Sei $z : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion, die mit $z_j := z|_{\Omega_j}$ der Bedingung $z_j \in (\mathcal{C}^1(\Omega_j))^n$ genügt.



Zeigen Sie: Falls für jede innere Kante $\Gamma_{j,k} := \overline{\Omega_j} \cap \overline{\Omega_k}$ mit der zugehörigen Normalen $n_{j,k}$ (zeigt von Ω_j nach Ω_k) gilt

$$z_j n_{j,k} = z_k n_{j,k} \quad \forall\ j,k = 1,...,m,$$

dann ist $z \in H(\mathrm{div};\Omega) := \{w \in (L^2(\Omega))^n : \mathrm{div}\, w \in L^2(\Omega)\}$.

Hinweis: Die Divergenz ist hier im schwachen Sinne zu verstehen, also

$$\int \mathrm{div}\, z\varphi dx = -\int z\nabla\varphi dx.$$

Aufgabe 3 (Platten-Gleichung) **(10 Theorie + 15 Matlab Punkte)**

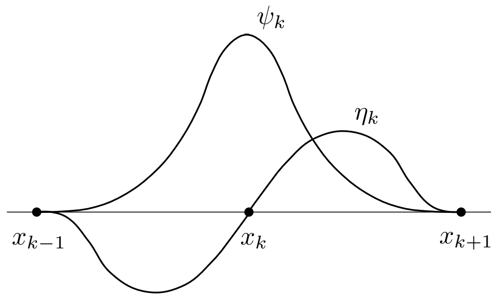
Sei $H_0^2(0,1) := \{u \in H^2(0,1) : u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0\}$. Wir betrachten die schwache Formulierung der Platten-Gleichung:

Suche $u \in H_0^2(0,1)$, sodass

$$\int_0^1 u''(x)\, v''(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^2(0,1). \tag{1}$$

Für $h := \frac{1}{N+1} > 0$ und $x_k = kh$ $(k = 0, ..., N+1)$ sei der Finite-Element-Raum V_h gegeben durch

$$V_h := \{v \in \mathcal{C}^1(0,1) : \, v|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathcal{P}^3([x_k, x_{k+1}])\} \subset H^2(0,1).$$



Als Basis von V_h wählen wir $\{\psi_i, i = 0, ..., N+1\} \cup \{\eta_i, i = 0, ..., N+1\}$, wobei wir

$$\psi_i(x_k) = \delta_{i,k},\ \psi_i'(x_k) = 0,\ \eta_i(x_k) = 0 \text{ und } \eta_i'(x_k) = \delta_{i,k}$$

voraussetzen.

Zeigen Sie:

(i) Die Basis-Funktionen ψ_k, η_k sind eindeutig gegeben durch:

$$\eta_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{h^2}(x - x_k)(x - x_{k-1})^2, & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \frac{1}{h^2}(x - x_k)(x - x_{k+1})^2, & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \varphi_k(x) - \frac{1}{h}(\eta_{k-1}(x) + \eta_k(x)), & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \varphi_k(x) + \frac{1}{h}(\eta_k(x) + \eta_{k+1}(x)), & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei φ_k die Hutfunktionen bzgl. x_k bezeichnet.

(ii) $\sum_{i=0}^{N+1} \psi_i(x) = 1$ für alle $x \in (0,1)$.

Mit $(u, v) := \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$ ist die System-Matrix A als Blockmatrix und die rechte Seite b gegeben durch

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} (\psi_1'', \psi_1'') & \dots & (\psi_1'', \psi_N'') & (\psi_1'', \eta_1'') & \dots & (\psi_1'', \eta_N'') \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\psi_N'', \psi_1'') & \dots & (\psi_N'', \psi_N'') & (\psi_N'', \eta_1'') & \dots & (\psi_N'', \eta_N'') \\ \hline (\eta_1'', \psi_1'') & \dots & (\eta_1'', \psi_N'') & (\eta_1'', \eta_1'') & \dots & (\eta_1'', \eta_N'') \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\eta_N'', \psi_1'') & \dots & (\eta_N'', \psi_N'') & (\eta_N'', \eta_1'') & \dots & (\eta_N'', \eta_N'') \end{array}\right) \qquad b = \left(\begin{array}{c} (f, \psi_1) \\ \vdots \\ (f, \psi_N) \\ \hline (f, \eta_1) \\ \vdots \\ (f, \eta_N) \end{array}\right)$$

(iii) Geben Sie die Einträge der System-Matrix A explizit in Abhängigkeit von h an.

(iv) Zur Berechnung der rechten Seite verwenden wir eine Gauss-Quadratur, wobei gilt

$$\begin{aligned} (f, \psi_k) &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \psi_k^{(l)}(x)\, dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \psi_k^{(r)}(x)\, dx \\ &= \frac{h}{2} \left[\int_{-1}^{1} f\left(\frac{h}{2}(t+1) + x_{k-1}\right) \psi_k^{(l)} \left(\frac{h}{2}(t+1) + x_{k-1}\right) dt \right. \\ &\qquad \left. + \int_{-1}^{1} f\left(\frac{h}{2}(t+1) + x_k\right) \psi_k^{(r)} \left(\frac{h}{2}(t+1) + x_k\right) dt \right]. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir mit $\psi_k^{(l)}$ die Restriktion $\psi_k|_{[x_{k-1},x_k]}$ und mit $\psi_k^{(r)}$ die Restriktion $\psi_k|_{[x_k,x_{k+1}]}$. Vervollständigen Sie die Routine `buildRHS`, die für gegebenes f, h und N den Vektor für die rechte Seite aufstellt. Eine Vorlage können sie von der Homepage laden.

(v) Schreiben sie ein Skript `femPlatte`, das für $h = 1/2^{(1:8)}$ das LGS aufstellt und löst. Stellen Sie am Ende die Lösung graphisch dar. Schreiben sie dazu eine Funktion

```
val = eval_uh(x,sx,h,N),
```

welche für gegebenen Koeffizientenvektor x, h und N die Lösung u_h an den Punkten s_x auswertet.

(vi) Erweitern Sie Ihr Skript, sodass für jede Schrittweite der Fehler in der Maximumsnorm berechnet wird. Plotten Sie den Fehler in doppelt-logarithmischer Skala.

(vii) Testen Sie Ihre Implementierung am Beispiel $u(x) = \sin^2(\pi\, x)$ (berechnen Sie die passende rechte Seite f).