



Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2017/2018

Übungsblatt 13

Besprechung 31.1.2018.

Aufgabe 1 (Residuale Schätzer)

(15 Matlab Punkte)

Es folgt die Definition des residualen Fehlerschätzers für das Laplace Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Für weitere Details siehe Skript.

Sei für ein Element $T \in \mathcal{T}_h$ das lokale Residuum definiert als

$$R_T(u_h) := (\Delta u_h + f)|_T.$$

Für eine Kante e und eine Funktion $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$[v]_e := (v|_{T^+} - v|_{T^-}),$$

wobei T^+ und T^- die angrenzenden Elemente sind. Der Sprung ist definiert als

$$R_e(u_h) := \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e} \right]_e.$$

Der residuale Schätzer ist definiert als

$$\begin{aligned} \eta &:= \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2}, \\ \eta_T^2 &:= h_T^2 \|R_T(u_h)\|_{0;T}^2 + \sum_{e \in \bar{T}} h_e \|R_e(u_h)\|_{0;e}^2, \end{aligned}$$

wobei h_T die Fläche des Dreiecks T und h_e die Länge der Kante e ist.

- (i) Benutzen Sie Ihren alten `fem` Code und implementieren Sie den residualen Fehlerschätzer.
- (ii) Testen Sie Ihre Implementierung indem Sie sich eine Referenzlösung vorgeben, die FEM Approximation u_h ausrechnen und den Fehler $\|u - u_h\|_1$ mit η für $h \rightarrow 0$ vergleichen.

Aufgabe 2 (Fehlerschätzer)

(10 Punkte)

Sei $\Omega = (0, 1)$. Wir betrachten das folgende Randwertproblem:

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &:= -((b(x)u'(x))' + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{auf } \Omega, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

wobei die Funktionen b, c glatt seien und die folgende Elliptizitätsbedingungen $b(x) \geq \bar{b} > 0$, $c(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ gelte. Ferner sei $\mathcal{T} := \{T_n : 0 \leq n \leq N-1\}$, $T_n := (x_n, x_{n+1})$, ein Gitter auf Ω , wobei $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$ und $h_{T_n} := x_{n+1} - x_n$. Weiter bezeichne $u_N \in \mathcal{S}_0^{1,1}$ die FE-Approximation, wobei

$$\mathcal{S}_0^{1,1} := \mathcal{S}^{1,1} \cap H_0^1(\Omega), \quad \mathcal{S}^{1,1} = \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1, T \in \mathcal{T}\}.$$

Wir definieren weiter für $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ die Bilinearform $a_{\tilde{\Omega}}(w, v) := \int_{\tilde{\Omega}} b(x)w'(x)v'(x) + c(x)v(x) dx$, sowie die Norm $\|v\|_{E, \tilde{\Omega}}^2 := a_{\tilde{\Omega}}(v, v)$.

(i) Für $n = 0, \dots, N - 1$ sei $\varphi_{\text{Dir},n} \in H_0^1(T_n)$ Lösung des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{aligned} (L\varphi_{\text{Dir},n})(x) &= f(x) - (Lu_N)(x), & \text{auf } T_n, \\ \varphi_{\text{Dir},n}(x_n) &= \varphi_{\text{Dir},n}(x_{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann die folgende Abschätzung gilt:

$$\sum_n \|\varphi_{\text{Dir},n}\|_{E;T_n}^2 \leq \|u - u_N\|_{E;\Omega}^2, \quad (\text{Dirichlet-Schätzer}).$$

(ii) Für $n = 0, \dots, N - 1$ sei $\varphi_{\text{Neu},n} \in H^1(T_n)$ Lösung des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{aligned} (L\varphi_{\text{Neu},n})(x) &= f(x) - (Lu_N)(x), & \text{auf } T_n, \\ \varphi'_{\text{Neu},n}(x_n) &= -\frac{1}{2}[u'_N(x_n)], \\ \varphi'_{\text{Neu},n}(x_{n+1}) &= \frac{1}{2}[u'_N(x_{n+1})], \end{aligned}$$

wobei $[u'_N(x)] := (u'_N)^+(x) - (u'_N)^-(x)$ den Sprung der Ableitung bezeichnet (rechtseitiger minus linkseitiger Limes). Zeigen Sie, dass dann die folgende Abschätzung gilt:

$$\|u - u_N\|_{E;\Omega}^2 \leq \sum_n \|\varphi_{\text{Neu},n}\|_{E;T_n}^2, \quad (\text{Neumann-Schätzer}).$$