Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2017/2018

Übungsblatt 14

Besprechung 7.2.2018.

Aufgabe 1 (SPP) (10 Punkte)

Wir betrachten das allgemeine SPP

$$\begin{cases} \text{Gegeben} & (f,g) \in X' \times M', \text{ suche } (u,p) \in X \times M \text{ mit} \\ a(u,v) + b(v,p) & = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in X, \\ b(u,q) & = \langle g, q\rangle \quad \forall q \in M, \end{cases} \tag{1}$$

wobei X und M Hilberträume sind, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ und $b : X \times M \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen sind. Das Problem sei wohlgestellt: a erfüllt die inf-sup Bedingung auf $V \times V$ mit $V := \ker(B)$, $B : X \to M'$, $\langle Bu, q\rangle := b(u,q)$, $\forall u \in X, \forall q \in M$, und b erfüllt die inf-sup Bedingung auf $X \times M$. Sei zusätzlich a auf X s.p.d., also symmetrisch und $a(v,v) \geq 0$, $\forall v \in X$.
Sei die Lagrange-Funktion $\mathcal{L} : X \times M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}(u,p) := \frac{1}{2} a(u,u) - \langle f, u\rangle + [b(u,p) - \langle g, p\rangle], \tag{2}$$

wobei $p \in M$ hier die Rolle eines Lagrange-Multiplikators spielt.
Zeigen Sie: $(u,p) \in X \times M$ ist genau dann eine Lösung von (1), wenn (u,p) ein Sattelpunkt für (2) ist

$$\mathcal{L}(u,q) \leq \mathcal{L}(u,p) \leq \mathcal{L}(v,p), \quad \forall (v,q) \in X \times M.$$

Hinweise:

(i) Für die Aufgabe benötigen Sie Grundlagen der Variationsrechnung: Extremalrechnung in unendlich-dimensionalen Räumen. Prinzipiell gibt es sehr viele Parallelen zur Extremalrechnung in endlich-dimensionalen Räumen und es reicht vollkommen für das Verständnis dieses Problems aus. Sie können folgende Aussagen verwenden. Wir beginnen mit der verallgemeinerten Ableitung.

Definition 1 (Gâteaux Ableitung)**.** *Seien X und Y Banachräume. $f : X \to Y$ heißt Gâteaux-differenzierbar im Punkt $u \in X$, falls für alle $v \in X$ der Grenzwert*

$$\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u), v\rangle := \lim_{t \to 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t}$$

existiert, und $v \mapsto \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u), v\rangle$ linear und beschränkt ist.

Damit gilt für die zweite Ableitung („Hesse-Matrix“)

$$\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)v, v\rangle = \lim_{t \to 0} \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u+tv), v\rangle - \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u), v\rangle}{t}$$

In Analogie zu endlich-dimensionalen Räumen, haben wir auch hier hinreichende Bedingungen für ein Minimum.

Satz 1 (Minimum für konvexe Funktionen)**.** *Sei X ein reflexiver Banachraum, $M \subset X$ abgeschlossen und konvex, und $f : X \to \mathbb{R}$ zweimal Gâteaux-differenzierbar. Falls gilt*

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)v, v\rangle &\geq 0 \quad \forall u, v \in M, \\ \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u_0), v\rangle &= 0 \quad \forall v \in X, \end{aligned}$$

dann besitzt f ein globales Minimum in u_0 auf M.

(ii) Hilberträume sind immer reflexiv.

Aufgabe 2 (Multigrid, Matlab) (15 Punkte)

Implementieren Sie das Mehrgitter-Verfahren, indem Sie die Schritte 1)-7) aus §7.1.2 im Skript umsetzen. Verwenden Sie hierzu $\mu = \nu = 5$ und testen Sie den V- (R=1) sowie den W-Zyklus (R=2). Verwenden Sie Ihren `fem` Code und ersetzen Sie beim Lösen des LGS den /-Operator durch das Multigrid-Verfahren. Vergleichen Sie beide Lösungen miteinander (mit und ohne MG).