Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2017/2018

Übungsblatt 3

Besprechung 8.11.2017.

Folgende Definitionen/Behauptungen können behilflich sein.

- Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, bezeichnen wir mit $H^1(\Omega)$ den Sobolev-Raum erster Ordnung. Mit $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ bezeichnen wir die Funktionen mit Null Randwerten. Definitionen der Räume und Normen finden Sie im Skript auf der Homepage.

- Glatte Funktionen sind dicht in $H_1(\Omega)$. D.h., für alle $u \in H_1(\Omega)$, existiert es eine Folge $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C^\infty(\Omega)$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_1 = 0,$$

  wobei $\|\cdot\|_1$ die Sobolev-Norm von $H^1(\Omega)$ ist. Analog ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$, wobei $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ der Raum glatter Funktionen mit kompaktem Träger ist.

- Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Gleichheit fast überall ($f = g$ f.ü.) bedeutet

$$\int_C (f - g)dx = 0,$$

  wobei $C \subset \Omega$ eine beliebige messbare[1] Menge ist.

- Sei $\Gamma := \partial\Omega$ ein Lipschitz-Rand. Der Spuroperator (trace) $tr : H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ ist eine stetige Abbildung im Sinne

$$\|tr(u)\|_{L_2(\Gamma)} \le C(\Omega)\|u\|_1,$$

  für alle $u \in H_1(\Omega)$. Insbesondere gilt für stetige Funktionen $v \in C(\bar{\Omega})$ die Gleicheit

$$tr(v) = v|_\Gamma,$$

  wobei $v|_\Gamma$ die Einschränkung von v auf den Rand ist.

- Cauchy-Schwarz Ungleichung für L_2: Seien $f, g \in L_2(\Omega)$, dann gilt

$$|(f,g)_0| = \left|\int_\Omega fg dx\right| \le \sqrt{\int_\Omega |f|^2 dx}\sqrt{\int_\Omega |g|^2 dx} = \|f\|_0\|g\|_0.$$

  Für $f, g \neq 0$ gilt also

$$\frac{|(f,g)_0|}{\|f\|_0\|g\|_0} \le 1.$$

  In Worten: Der Ausdruck auf der linken Seite ist der Kosinus des L_2-Winkels zwischen f und g, der natürlicherweise kleiner 1 ist.

[1] Für den Zweck dieser Übung kann man den Begriff vernachlässigen und an beliebige Mengen denken.

Aufgabe 1 (Schwache Ableitung) (10 Punkte)

(i) Bestimmen Sie (mit Beweis) die schwache Ableitung von

$$h(x) := \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & 1 < x \le 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Sei Ω offen, u und v in $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $uv \in H^1(\Omega)$ und $D_j(uv) = D_j(u)v + uD_j(v)$.

(iii) Sei $u \in H^1((a,b))$. Zeigen Sie, dass u einen stetigen Repräsentanten besitzt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(x)dx \quad \text{f.ü.}$$

Dafür können Sie verwenden, dass falls $f \in H^1((a,b))$ und $f' = 0$, dann ist f f.ü. konstant. Die Stetigkeit folgt aus dem Satz von Lebesgue.

(iv) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $u \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die schwache Ableitung $D_j u \in L_2(\Omega)$ eindeutig (in L_2) ist.

Aufgabe 2 (Spuroperator) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand $\Gamma := \partial\Omega$. Zeigen Sie, dass für den Spuroperator

$$tr : H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$$

gilt: Ist $u \in H_0^1(\Omega)$, so ist $tr(u) = 0$.

Aufgabe 3 (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung) (15 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ in einem Würfel der Kantenlänge $s \in \mathbb{R}^+$ enthalten. Zeigen Sie

$$\|v\|_0 \le s|v|_1 \qquad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Hinweis: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung + Cauchy-Schwarz.