Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2017/2018

Übungsblatt 4

Besprechung 15.11.2017.

Hinweise

- Sei V ein beliebiger normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|_V$. Eine Funktion $a : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt eine (reelle) *Bilinearform* falls gilt

  $$a(c_1x + y, c_2z + v) = c_1c_2a(x, z) + c_1a(x, v) + c_2a(y, z) + a(y, v), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ \forall x, y, z, v \in V.$$

  Mit anderen Worten, linear in beiden Argumenten.

  Eine Bilinearform a heißt *symmetrisch* wenn gilt

  $$a(x, y) = a(y, x), \quad \forall x, y \in V.$$

  Ansonsten heißt a *nicht symmetrisch.*

  Eine Bilinearform a heißt *stetig* falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass

  $$|a(x, y)| \leq C\|x\|_V\|y\|_V, \quad \forall x, y \in V.$$

  Eine Bilinearform a heißt *koerziv* falls es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass

  $$a(x, x) \geq c\|x\|_V^2, \quad \forall x \in V.$$

- Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine symmetrische, stetige und koerzive Bilinearform mit $C = c = 1$. Skalarprodukte werden meistens mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ oder $(\cdot,\cdot)_V$ bezeichnet.

- Sei V ein Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle_V : V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf V. Sei $A \subset V$ ein Unterraum von V. Man sagt ein Element $x \in V$ ist *orthogonal* zu A (bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$) falls gilt

  $$\langle x, y\rangle_V = 0, \quad \forall y \in A.$$

  Sei $u \in V$. Das Element $x \in V$ heißt die *Orthogonalprojektion* von u auf A falls gilt $u - x$ ist orthogonal zu A.

- Ein Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ist ein normierter vollständiger[1] Vektorraum H mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ und Norm

  $$\|\cdot\|_H := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_H}.$$

[1] Für die Übung muss man den Begriff nicht verstehen.

Aufgabe 1 (Testraum) (5 Punkte)

Bei der Herleitung der schwachen Formulierung sind wir, i.A., folgendermaßen vorgegangen. Wir haben eine klassische Formulierung auf einem beschränkten Gebiet mit Lipschitzrand Ω

$$
\begin{aligned}
Lu &= f \text{ in } C^k(\Omega),\\
Bu &= g \text{ auf } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Nach Multiplikation mit einer Testfunktion $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ und eventueller partieller Integration, haben wir die folgende Formulierung hergeleitet

$$
b(u, v) = (f, v)_{L^2},\ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),
$$

mit einer zu L assoziierten Bilinearform b. Es sei jetzt dahin gestellt, wie wir Randwerte g kodieren: man kann diese, z.B., in den Ansatzraum einbauen, oder mit in die rechte Seite aufnehmen.

Da die schwache Formulierung aus der klassischen hergeleitet wurde, ist sie (trivialerweise) allgemeiner: Die Lösungsmenge der klassichen Formulierung ist eine Untermenge der Lösungsmenge der schwachen Formulierung. Anderseits wollen wir sicherstellen, dass wir das „richtige“ machen. Das/Ein Kriterium dafür wäre: löst das Paar (u, f) die schwache Formulierung **und** hat es genug Regularität, um im klassichen Sinne interpretiert zu werden, so muss das Paar (u, f) auch die klassische Formulierung lösen. Denn sonst haben wir ein Paar (u, f), dass in beiden Formulierungen Sinn macht, aber nur in einer der Formulierungen tatsächlich eine Lösung ist. Die Lösungseigenschaft sollte aber alleine vom physikalischen Verhalten abhängen und nicht von der mathematischen Formulierung.

Um die Richtigkeit der schwachen Formulierung sicherzustellen, muss man den Testraum $\mathcal{D}(\Omega)$ passend wählen. Welche Eigenschaft und warum muss der Testraum dafür besitzen? Lösen Sie die Aufgabe am konkreten Beispiel

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f \text{ in } \Omega,\\
u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega,\\
&\leftrightarrow\\
\int_\Omega \nabla u \nabla v &= \int_\Omega f v,\ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),\\
u &\in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

D.h. nehmen Sie an, dass u die Lösung der schwachen Formulierung ist. Leiten Sie dann her, dass u bei genügender Glattheit und mit passendem Testraum auch die Lösung der klassischen Gleichung ist. Achten Sie dabei auf die Bedingungen an den Testraum (und Glattheit), die Sie dafür benötigen.

Hinweis: Die Aufgabe hat viel mit Aufgabe 1 (iv), Blatt 3 gemeinsam. Die Lösung ist viel kürzer als die Formulierung.

Aufgabe 2 (Allgemeine Elliptische Gleichungen) (10 Punkte)

Wir betrachten ein allgemeines elliptisches Problem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand und der Operator L definiert als

$$
\begin{aligned}
Lu &:= -\nabla \cdot (A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu, \qquad (1)\\
A &\in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d}),\\
b &\in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d),\\
c &\in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}),
\end{aligned}
$$

wobei $\nabla\cdot$ die Divergenz bezeichnet. Die Einträge von A, b und c seien Funktionen, die für jedes $x \in \Omega$ wohldefiniert sind (z.B. stetig oder stückweise stetig). Man sagt L ist *elliptisch*, falls A gleichmäßig positiv definit ist

$$
\xi \cdot A(x)\xi \geq \gamma|\xi|^2,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d, x \in \Omega, \qquad (2)
$$

für $\gamma > 0$. Tatsächlich kann man überprüfen, dass diese Definition mit der aus der Vorlesung übereinstimmt. Wir betrachten nun das Problem

$$Lu = f \in H^{-1}(\Omega),\ u \in H_0^1(\Omega) \tag{3}$$

in schwacher Formulierung (siehe Aufgabe) mit homogenen Randbedingungen.

(i) Was modelliert A, b und c? Sie können dafür ein konkretes Modell verwenden.

(ii) Interpretieren Sie (2) aus physikalischer Sicht.

(iii) Leiten Sie die schwache Formulierung für (1) her.

(iv) Sei zusätzlich $b \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und es gelte

$$c - \frac{1}{2}\nabla \cdot b \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

Zeige, dass (3) eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Hier können Sie den Satz von Lax-Milgramm für unsymmetrische Bilinearformen verwenden. Sie brauchen also nur zu zeigen, dass die Bilinearform stetig und koerziv ist.

Aufgabe 3 (Orthogonalprojektionen) (10 Punkte)

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Hilbertraum und $V \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann existiert für jeden $u \in H$ ein eindeutiger Minimierer $u_{\min} \in V$ mit $\|u - u_{\min}\|_H = \inf_{v \in V} \|u - v\|_H$.

(i) Zeige: Falls für $y \in V$ gilt

$$\langle u - y, v \rangle_H = 0,\ \forall v \in V,$$

dann ist $y = u_{\min}$.

Bemerkung: Die andere Richtung gilt auch, Sie müssen es aber nicht beweisen. Die Existenz und Eindeutigkeit ist sogar für beliebige konvexe und abgeschlossene Mengen $M \subset H$ gesichert.

(ii) Wir betrachten das Variationsproblem aus der Vorlesung

$$a(u, v) = f(v),\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

für $u \in H_0^1(\Omega)$, wobei a symmetrisch, bilinear und koerziv ist. Das *Galerkinverfahren* zur Approximation von u lautet: Man wähle eine Folge von abgeschlossenen Unterräumen $(V_h)_h$ und bestimme die Approximation $u_h \in V_h$ als

$$a(u_h, v_h) = f(v_h),\ \forall v_h \in V_h.$$

Zeige: u_h ist die Orthogonalprojektion von u auf V_h bezüglich eines geeigneten[2] Skalarprodukts.

[2] Sie müssen also dieses Skalarprodukt bestimmen.