Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2018/2019

Übungsblatt 1

Besprechung 8.11.2018

Aufgabe 1 (Modellierung) (5 Punkte)

Gegeben sei ein Fluid mit der Dichte $\rho(t,x) \in \mathbb{R}^+$ und dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(t,x) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Leiten Sie aus physikalischen Prinzipien die folgende Kontinuitätsgleichung her:

$$\rho_t(t,x) + \operatorname{div}(\rho(t,x)\vec{u}(t,x)) = 0,$$

wobei div den Divergenzoperator bezeichnet.

Hinweis: Verwenden Sie das Prinzip der Massenerhaltung und den Gauß'schen Integralsatz. Die Annahmen, die für die Herleitung notwendig sind, werden Sie im Laufe der Rechnung erkennen können. Siehe Skript auf der Homepage.

Aufgabe 2 (Klassifizierung) (5 Punkte)

Charakterisieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch):

(i) $-u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$

(ii) $\frac{5}{2}u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$

(iii) $9u_{xx} + 12u_{xy} + 4u_{yy} = 0$

(iv) $(1 - x^2)u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + (1 - y^2)u_{yy} = 2x\, u_x + 2y\, u_y$

Aufgabe 3 (Methode der Charakteristiken) (10 Punkte)

Lösen Sie die folgende PDG mit der Methode der Charakteristiken. In welchem Bereich gilt die Lösung?

$$u_x + u_y = u^2,\ x \in \mathbb{R}^2, \quad u(x,-x) = x,\ x \in \mathbb{R}$$

Hinweis: Im Gegensatz zu den Beispielen aus der Vorlesung, im Allgemeinen sind Charakteristiken Kurven auf denen die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung genügt. Insbesondere müssen die Charakteristiken keine einfachen Geraden sein und die Lösung auf der Charakteristik muss nicht konstant bleiben.