Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2018/2019

Übungsblatt 10

Besprechung 17.1.2019

Aufgabe 1 (SPP) (10 Punkte)

Wir betrachten das allgemeine SPP

$$\begin{cases} \text{Gegeben} & (f,g) \in X' \times M', \text{ suche } (u,p) \in X \times M \text{ mit} \\ a(u,v) + b(v,p) & = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in X, \\ b(u,q) & = \langle g, q\rangle \quad \forall q \in M, \end{cases} \tag{1}$$

wobei X und M Hilberträume sind, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ und $b : X \times M \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen sind. Das Problem sei wohlgestellt: a erfüllt die inf-sup Bedingung auf $V \times V$ mit $V := \ker(B)$, $B : X \to M'$, $\langle Bu, q\rangle := b(u,q)$, $\forall u \in X, \forall q \in M$, und b erfüllt die inf-sup Bedingung auf $X \times M$. Sei zusätzlich a auf X s.p.d., also symmetrisch und $a(v,v) \geq 0$, $\forall v \in X$.
Sei die Lagrange-Funktion $\mathcal{L} : X \times M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}(u,p) := \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u\rangle + [b(u,p) - \langle g, p\rangle], \tag{2}$$

wobei $p \in M$ hier die Rolle eines Lagrange-Multiplikators spielt.
Zeigen Sie: $(u,p) \in X \times M$ ist genau dann eine Lösung von (1), wenn (u,p) ein Sattelpunkt für (2) ist

$$\mathcal{L}(u,q) \leq \mathcal{L}(u,p) \leq \mathcal{L}(v,p), \quad \forall (v,q) \in X \times M.$$

Hinweise:

(i) Für die Aufgabe benötigen Sie Grundlagen der Variationsrechnung: Extremalrechnung in unendlich-dimensionalen Räumen. Prinzipiell gibt es sehr viele Parallelen zur Extremalrechnung in endlich-dimensionalen Räumen und es reicht vollkommen für das Verständnis dieses Problems aus. Sie können folgende Aussagen verwenden. Wir beginnen mit der verallgemeinerten Ableitung.

Definition 1 (Gâteaux Ableitung)**.** *Seien X und Y Banachräume. $f : X \to Y$ heißt Gâteaux-differenzierbar im Punkt $u \in X$, falls für alle $v \in X$ der Grenzwert*

$$\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u), v\rangle := \lim_{t\to 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t}$$

existiert, und $v \mapsto \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u), v\rangle$ linear und beschränkt ist.

Damit gilt für die zweite Ableitung („Hesse-Matrix“)

$$\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)v, v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u+tv), v\rangle - \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u), v\rangle}{t}$$

In Analogie zu endlich-dimensionalen Räumen, haben wir auch hier hinreichende Bedingungen für ein Minimum.

Satz 1 (Minimum für konvexe Funktionen)**.** *Sei X ein reflexiver Banachraum, $M \subset X$ abgeschlossen und konvex, und $f : X \to \mathbb{R}$ zweimal Gâteaux-differenzierbar. Falls gilt*

$$\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)v, v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in M,$$
$$\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u_0), v\rangle = 0 \quad \forall v \in X,$$

dann besitzt f ein globales Minimum in u_0 auf M.

(ii) Hilberträume sind immer reflexiv.

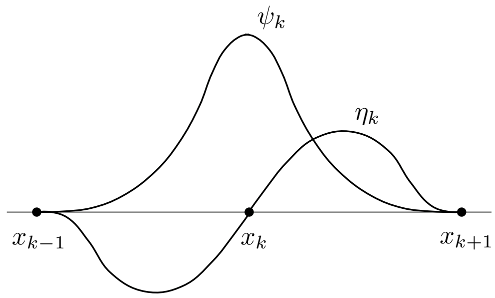
Aufgabe 2 (Platten-Gleichung) (10 Theorie + 10 Matlab Punkte)

Sei $H_0^2(0,1) := \{u \in H^2(0,1) : u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0\}$. Wir betrachten die schwache Formulierung der Platten-Gleichung:

Suche $u \in H_0^2(0,1)$, sodass
$$\int_0^1 u''(x)\, v''(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^2(0,1). \tag{3}$$

Für $h := \frac{1}{N+1} > 0$ und $x_k = kh$ $(k = 0, ..., N+1)$ sei der Finite-Element-Raum V_h gegeben durch
$$V_h := \{v \in \mathcal{C}^1(0,1) :\, v|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathcal{P}^3([x_k, x_{k+1}])\} \subset H^2(0,1).$$

Als Basis von V_h wählen wir $\{\psi_i, i = 0, ..., N+1\} \cup \{\eta_i, i = 0, ..., N+1\}$, wobei wir
$$\psi_i(x_k) = \delta_{i,k},\ \psi_i'(x_k) = 0,\ \eta_i(x_k) = 0 \text{ und } \eta_i'(x_k) = \delta_{i,k}$$
voraussetzen.



Zeigen Sie:

(i) Die Basis-Funktionen ψ_k, η_k sind eindeutig gegeben durch:
$$\eta_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{h^2}(x - x_k)(x - x_{k-1})^2, & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \frac{1}{h^2}(x - x_k)(x - x_{k+1})^2, & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \varphi_k(x) - \frac{1}{h}(\eta_{k-1}(x) + \eta_k(x)), & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \varphi_k(x) + \frac{1}{h}(\eta_k(x) + \eta_{k+1}(x)), & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei φ_k die Hutfunktionen bzgl. x_k bezeichnet.

(ii) $\sum_{i=0}^{N+1} \psi_i(x) = 1$ für alle $x \in (0,1)$.

Mit $(u, v) := \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$ ist die System-Matrix A als Blockmatrix und die rechte Seite b gegeben durch

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} (\psi_1'', \psi_1'') & \dots & (\psi_1'', \psi_N'') & (\psi_1'', \eta_1'') & \dots & (\psi_1'', \eta_N'') \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\psi_N'', \psi_1'') & \dots & (\psi_N'', \psi_N'') & (\psi_N'', \eta_1'') & \dots & (\psi_N'', \eta_N'') \\ \hline (\eta_1'', \psi_1'') & \dots & (\eta_1'', \psi_N'') & (\eta_1'', \eta_1'') & \dots & (\eta_1'', \eta_N'') \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\eta_N'', \psi_1'') & \dots & (\eta_N'', \psi_N'') & (\eta_N'', \eta_1'') & \dots & (\eta_N'', \eta_N'') \end{array}\right) \qquad b = \left(\begin{array}{c} (f, \psi_1) \\ \vdots \\ (f, \psi_N) \\ \hline (f, \eta_1) \\ \vdots \\ (f, \eta_N) \end{array}\right)$$

(iii) Geben Sie die Einträge der System-Matrix A explizit in Abhängigkeit von h an.

(iv) Zur Berechnung der rechten Seite verwenden wir eine Gauss-Quadratur, wobei gilt

$$
\begin{aligned}
(f, \psi_k) &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\psi_k^{(l)}(x)\,dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\psi_k^{(r)}(x)\,dx \\
&= \frac{h}{2}\left[\int_{-1}^{1} f\left(\frac{h}{2}(t+1)+x_{k-1}\right)\psi_k^{(l)}\left(\frac{h}{2}(t+1)+x_{k-1}\right)dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^{1} f\left(\frac{h}{2}(t+1)+x_k\right)\psi_k^{(r)}\left(\frac{h}{2}(t+1)+x_k\right)dt\right].
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnen wir mit $\psi_k^{(l)}$ die Restriktion $\psi_k|_{[x_{k-1},x_k]}$ und mit $\psi_k^{(r)}$ die Restriktion $\psi_k|_{[x_k,x_{k+1}]}$. Vervollständigen Sie die Routine `buildRHS`, die für gegebenes f, h und N den Vektor für die rechte Seite aufstellt. Eine Vorlage können sie von der Homepage laden.

(v) Schreiben sie ein Skript `femPlatte`, das für $h = 1/2^{(1:8)}$ das LGS aufstellt und löst. Stellen Sie am Ende die Lösung graphisch dar. Schreiben sie dazu eine Funktion

```
val = eval_uh(x,sx,h,N),
```

welche für gegebenen Koeffizientenvektor x, h und N die Lösung u_h an den Punkten s_x auswertet.

(vi) Erweitern Sie Ihr Skript, sodass für jede Schrittweite der Fehler in der Maximumsnorm berechnet wird. Plotten Sie den Fehler in doppelt-logarithmischer Skala.

(vii) Testen Sie Ihre Implementierung am Beispiel $u(x) = \sin^2(\pi\, x)$ (berechnen Sie die passende rechte Seite f).