ulm university universität
uulm

Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2018/2019

Übungsblatt 12

Besprechung 31.1.2019

Aufgabe 1 (Residuale Schätzer) (15 Matlab Punkte)

Es folgt die Definition des residualen Fehlerschätzers für das Laplace Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Für weitere Details siehe Skript.
Sei für ein Element $T \in \mathcal{T}_h$ das lokale Residuum definiert als

$$R_T(u_h) := (\Delta u_h + f)_{|T}.$$

Für eine Kante e und eine Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ sei

$$[v]_e := (v_{|T^+} - v_{|T^-}),$$

wobei T^+ und T^- die angrenzenden Elemente sind. Der Sprung ist definiert als

$$R_e(u_h) := \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e}\right]_e.$$

Der residuale Schätzer ist definiert als

$$\begin{aligned} \eta &:= \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2}, \\ \eta_T^2 &:= h_T^2 \|R_T(u_h)\|_{0;T}^2 + \sum_{e \subset \overline{T}} h_e \|R_e(u_h)\|_{0;e}^2, \end{aligned}$$

wobei h_T die Fläche des Dreiecks T und h_e die Länge der Kante e ist.

(i) Benutzen Sie Ihren alten `fem` Code und implementieren Sie den residualen Fehlerschätzer.

(ii) Testen Sie Ihre Implementierung indem Sie sich eine Referenzlösung vorgeben, die FEM Approximation u_h ausrechnen und den Fehler $\|u - u_h\|_1$ mit η für $h \to 0$ vergleichen.

Aufgabe 2 (Fehlerschätzer) (10 Punkte)

Sei $\Omega = (0, 1)$. Wir betrachten das folgende Randwertproblem:

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &:= -\big((b(x)u'(x)\big)' + c(x)u(x) = f(x) \qquad \text{auf } \Omega, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

wobei die Funktionen b, c glatt seien und die folgende Elliptizitätsbedingungen $b(x) \geq \bar{b} > 0$, $c(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ gelte. Ferner sei $\mathcal{T} := \{T_n \ : \ 0 \leq n \leq N-1\}$, $T_n := (x_n, x_{n+1})$, ein Gitter auf Ω, wobei $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$ und $h_{T_n} := x_{n+1} - x_n$. Weiter bezeichne $u_N \in \mathcal{S}_0^{1,1}$ die FE-Approximation, wobei

$$\mathcal{S}_0^{1,1} := \mathcal{S}^{1,1} \cap H_0^1(\Omega), \qquad \mathcal{S}^{1,1} = \big\{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \ : \ v|_T \in \mathcal{P}_1, T \in \mathcal{T}\big\}.$$

Wir definieren weiter für $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ die Bilinearform $a_{\tilde{\Omega}}(w, v) := \int_{\tilde{\Omega}} b(x)w'(x)v'(x) + c(x)v(x)\ dx$, sowie die Norm $\|v\|_{E,\tilde{\Omega}}^2 := a_{\tilde{\Omega}}(v, v)$.

(i) Für $n = 0, \dots, N-1$ sei $\varphi_{\mathrm{Dir},n} \in H_0^1(T_n)$ Lösung des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{aligned}(L\varphi_{\mathrm{Dir},n})(x) &= f(x) - (Lu_N)(x), \qquad \text{auf } T_n,\\ \varphi_{\mathrm{Dir},n}(x_n) &= \varphi_{\mathrm{Dir},n}(x_{n+1}) = 0.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann die folgende Abschätzung gilt:

$$\sum_n \|\varphi_{\mathrm{Dir},n}\|^2_{E;T_n} \leq \|u - u_N\|^2_{E;\Omega}, \qquad \text{(Dirichlet-Schätzer).}$$

(ii) Für $n = 0, \dots, N-1$ sei $\varphi_{\mathrm{Neu},n} \in H^1(T_n)$ Lösung des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{aligned}(L\varphi_{\mathrm{Neu},n})(x) &= f(x) - (Lu_N)(x), \qquad \text{auf } T_n,\\ \varphi'_{\mathrm{Neu},n}(x_n) &= -\frac{1}{2}\lfloor u'_N(x_n)\rfloor,\\ \varphi'_{\mathrm{Neu},n}(x_{n+1}) &= \frac{1}{2}\lfloor u'_N(x_{n+1})\rfloor,\end{aligned}$$

wobei $\lfloor u'_N(x)\rfloor := (u'_N)^+(x) - (u'_N)^-(x)$ den Sprung der Ableitung bezeichnet (rechtseitiger minus linkseitiger Limes). Zeigen Sie, dass dann die folgende Abschätzung gilt:

$$\|u - u_N\|^2_{E;\Omega} \leq \sum_n \|\varphi_{\mathrm{Neu},n}\|^2_{E;T_n}, \qquad \text{(Neumann-Schätzer).}$$