Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2018/2019

Übungsblatt 2

Besprechung 8.11.2018

Aufgabe 1 (Charakteristiken 2. Ordnung) (10 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die Methode der Charakteristiken für Gleichungen erster Ordnung kennengelernt. Entlang dieser Charakteristiken wird die Lösung "transportiert": Sie genügt einer gewöhnlichen Differential Gleichung.
Wir haben ebenfalls die drei Typen von linearen Differential Gleichungen zweiter Ordnung kennengelernt: elliptisch, parabolisch, hyperbolisch. Wir können zwar die Methode der Charakteristiken nicht direkt auf diese Gleichung anwenden. Jedoch besitzen sie in einem geeignetem Sinne Charakteristiken, die den jeweiligen Typ der Gleichung auszeichnen.

Wir betrachten nun eine PDG zweiter Ordnung in zwei Variablen:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}). \tag{1}$$

Um dies in eine Gleichung erster Ordnung zu überführen, machen wir den Ansatz $\psi_1(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$, $\psi_2(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$.
Bestimmen Sie Kurven $y = y(x)$ bzw. $x = x(y)$, auf denen (1) sich zu einer Gleichung erster Ordnung reduzieren lässt.

Aufgabe 2 (9-Punkte-Stern) (10 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Die 9-Punkte-Stern-Diskretisierung lässt sich als eine Abbildung Δ_h auffassen, die durch

$$\Delta_h u(x_1,x_2) := \sum_{i,j=-1}^{1} c_{ij} u_h(x_1 + ih, x_2 + jh), \tag{2}$$

definiert ist. Z.B. für den 5-Punkte-Stern sind die Gewichte $c_{i,j}$ gegeben durch

- $c_{0,0} = -4/h^2$,
- $c_{0,1} = c_{1,0} = c_{0,-1} = c_{-1,0} = 1/h^2$ und
- $c_{ij} = 0$ für alle anderen (i,j).

Man sagt, dass (2) *Konsistenzordnung* p besitzt, falls

$$\|\Delta u - \Delta_h u\|_{h,\infty} \le Ch^p$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten C, für genügend glatte u.
Bestimmen Sie (mit Beweis/Rechenweg) die maximale Konsistenzordnung von (2) (9-Punkte-Stern) und die entsprechenden Gewichte.

Hinweis:

(i) Mit „genügend glatt“ ist gemeint, dass man annehmen darf, dass $u \in C^k$ für k groß genug ist (bestimmt sich im Laufe der Rechnung). Außer den Glattheitseigenschaften, darf man aber keine spezielle Struktur von u voraussetzen.

(ii) Für die Aufgabe brauchen Sie wiederholtes Anwenden der Taylorentwicklung, woraus die gesamte Konvergenztheorie von FDMs besteht.

(iii) Die maximale Konsistenzordnung ändert sich nicht, wenn Sie in (2) $c_{-1,0} = c_{1,0} = c_{0,-1} = c_{0,1}$ und $c_{-1,-1} = c_{-1,1} = c_{1,-1} = c_{1,1}$ annehmen.

Aufgabe 3 (Kondition) (5 Punkte)

Gegeben sei folgende Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(0) &= a, \quad u(1) = b, \end{aligned}$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Durch Diskritisierung mittels zentraler Finiter Differenzen mit uniformer Gitterweite $h = 1/(N+1)$, erhält man das LGS $A_h u_h = f_h$.

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_h.

(ii) Plotten Sie die Konditionszahl von A_h in Abhängigkeit von der Gitterweite h bzw. der Anzahl der Gitterpunkte N (z.B. für $N = 1, \ldots, 10^3$).

Hinweis:

(i) Die Eigenvektoren sind $v_j = \sqrt{2h}[\sin(ij\pi h)]_{i=1}^N$, $j = 1, \ldots, N$.

(ii) Die Konditionszahl einer s.p.d. Matrix bestimmt sich durch die Eigenwerte als $\kappa(A_h) := \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$, wobei $\lambda_{\ldots}$ sind jeweils die größten und -kleinsten Eigenwerte.

(iii) Zum Plotten können Sie entweder Matlab oder ein anderes Programm verwenden. Wichtig am Ende ist nur der Plot. Nehmen Sie bitte einen Ausdruck in die Übung mit.

Aufgabe 4 (FDM, Matlab) (10 Punkte)

Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung[1], d.h.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, && \text{in } (0,T) \times (0,1), \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0, && \text{für } t \in [0,T], \\ u(0,x) &= u_0(x), && \text{für } x \in [0,1], \end{aligned} \tag{3}$$

mit $u_0 \in C([0,1])$ und $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

Für die Anwendung der FDM betrachten wir der Einfachheit halber äquidistante Gitter für Raum und Zeit mit den Gitterweiten

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad \Delta x = \frac{1}{M}, \quad M, N \in \mathbb{N}.$$

Mit Hilfe der FMD bestimmen wir nun Approximationen

$$U_i^k \approx u(t^k, x_i), \quad t^k := k\Delta t, \quad x_i := i\Delta x, \qquad k = 0, \ldots, N, \; i = 0, \ldots, M,$$

[1] Eine parabolische Gleichung.

der exakten Lösung u von (2). Für die Diskretisierung von (2) führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} D^+_{\Delta t} v(t,x) &:= \frac{1}{\Delta t}(v(t+\Delta t, x) - v(t,x)), \\ D^-_{\Delta t} v(t,x) &:= \frac{1}{\Delta t}(v(t,x) - v(t-\Delta t, x)), \\ D^2_{\Delta x} v(t,x) &:= \frac{1}{(\Delta x)^2}(v(t,x+\Delta x) - 2v(t,x) + v(t,x-\Delta x)). \end{aligned}$$

Verwendet man nun $D^+_{\Delta t}$ zur Diskretisierung der Zeitableitung u_t in (2) gelangt man zum *expliziten* Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} D^+_{\Delta t} U^k_i &= D^2_{\Delta x} U^k_i, && 0 < i < M,\ 0 \le k < N, \\ U^k_0 = U^k_M &= 0, && 0 \le k \le N, \\ U^0_i &= u_0(x_i), && 0 \le i \le M. \end{aligned} \tag{4}$$

Verwendet man hingegen $D^-_{\Delta t}$, so gelangt man zum *impliziten* Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} D^-_{\Delta t} U^{k+1}_i &= D^2_{\Delta x} U^{k+1}_i, && 0 < i < M,\ 0 \le k < N, \\ U^k_0 = U^k_M &= 0, && 0 \le k \le N, \\ U^0_i &= u_0(x_i), && 0 \le i \le M. \end{aligned} \tag{5}$$

Aufgabe:

a) Implementieren Sie sowohl das explizite- als auch das implizite Euler-Verfahren für $T = 1$. Verwenden Sie beide Verfahren für $N = 100$, $M = 2, 3, \ldots, 20$ und $U^0_i = (-1)^i \sin(i\Delta x \pi)$, $0 \le i \le M$, und vergleichen Sie die Lösungen. Was stellen Sie fest?

b) Variieren Sie N und M derart, dass sie einen geeigneten Konvergenzplot erhalten. Verwenden Sie dabei das *implizite* Euler-Verfahren für $U^0_i = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi \cdot i\Delta x)$.

   Hinweis: Die exakte Lösung lautet: $u(t,x) = \frac{1}{\pi^2} e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$.