Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik ell. PDG
WiSe 2018/2019

Übungsblatt 5

Besprechung 29.11.2018

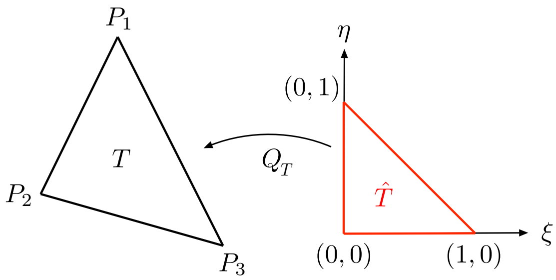
Aufgabe 1 (Transformation auf Referenzelement) (10 Punkte)

Bei der Finiten Elemente Methode (FEM) wird das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit einer Triangulierung $\mathcal{T}_h$ diskretisiert. Für

$$T := \operatorname{conv}\{P_1, P_2, P_3\} \in \mathcal{T}_h,$$

definieren wir die affine Abbildung Q_T, die das Referenzelement auf das Dreieck T abbildet, durch

$$Q_T : \hat{T} \to T$$



mit $Q_T(0,0) = P_1$, $Q_T(1,0) = P_2$ und $Q_T(0,1) = P_3$ (die Abbildung Q_T ist dadurch eindeutig bestimmt).
Außerdem definieren wir die Basis-Funktionen $\hat{\varphi}_i$ auf dem Referenzelement $\hat{T}$ durch

$$\hat{\varphi}_1(\xi,\eta) := 1 - \xi - \eta$$
$$\hat{\varphi}_2(\xi,\eta) := \xi$$
$$\hat{\varphi}_3(\xi,\eta) := \eta$$

und die Basisfunktionen φ_i auf dem Dreieck T durch $\varphi_i := (\hat{\varphi}_i \circ Q_T^{-1})$ $(i = 1,2,3)$. Es gilt also $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$.
Berechnen Sie die folgenden Einträge für $i, j = 1,2,3$:

(i) $\displaystyle\int_T \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)\, d(x,y)$

(ii) $\displaystyle\int_T \nabla\varphi_i(x,y)^T \nabla\varphi_j(x,y)\, d(x,y)$

(iii) $\displaystyle\int_T \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i(x,y) d(x,y)$ und $\displaystyle\int_T \frac{\partial}{\partial y}\varphi_i(x,y) d(x,y)$

(iv) $\displaystyle\int_T \varphi_i(x,y) d(x,y)$

Sie können in dieser Aufgabe die Integrale entweder direkt berechnen oder die Transformation auf das Referenzelement verwenden.

Aufgabe 2 (FEM Laplace, Matlab) (10 Punkte)

Wir betrachten die folgende Variationsformulierung:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Rand $\Gamma := \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_N)$ und $u_D \in H^1(\Omega)$. Suche $u \in H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$, so dass:

$$\int_\Omega \nabla u^T \nabla v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx + \int_{\Gamma_N} g\, v\, ds - \int_\Omega \nabla u_D^T \nabla v\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1}$$

Für die Implementierung definieren wir eine Triangulierung $\mathcal{T}_h$ auf dem Gebiet Ω und den diskreten Ansatz-Raum $S(\mathcal{T}_h)$ mit Basis-Funktionen φ_i, $i = 1, .., N$. Für die gesuchte Lösung wählen wir den Ansatz

$$u_h(x, y) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(x, y)$$

und testen (1) mit allen Basis-Funktionen φ_j, $j = 1, ..., N$. Wir erhalten dadurch das LGS

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{x} = (\alpha_k)_{k=1,...,N}$, der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{A} = (a_{i,j})_{j,k=1,...,N}, \quad a_{j,k} = \int_\Omega \nabla\varphi_k^T \nabla\varphi_j \, dx$$

und der rechten Seite

$$\mathbf{b} = (b_j)_{j=1,...,N}, \quad b_j = \int_\Omega f\, \varphi_j \; dx + \int_{\Gamma_N} g\, \varphi_j \; ds - \int_\Omega \nabla u_D^T \nabla\varphi_j \; dx.$$

(i) Leiten Sie die Formulierung (1) aus dem folgenden Problem her

$$\begin{aligned} -\Delta\tilde{u} &= f \text{ in } \Omega, \\ \tilde{u} &= u_D \text{ auf } \Gamma_D, \\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu} &= g \text{ auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

(ii) Laden Sie sich die Datei `fem2d` von der Homepage herunter und entpacken Sie die zip-Datei.

(iii) Stellen Sie den Vektor $\mathbf{b}$ für die rechte Seite auf. Verwenden Sie dabei folgende Näherungen

$$\int_T f\, \varphi_j \; dx \approx f(x_S, y_S) \int_T \varphi_j \; dx = f(x_S, y_S)\, \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\int_E g\, \varphi_j \, ds \approx g(x_M, y_M) \int_E \varphi_j \, ds = \frac{|E|}{2}\, g(x_M, y_M),$$

wobei (x_S, y_S) den Schwerpunkt des Dreiecks $T \in \mathcal{T}_h$ und (x_M, y_M) der Mittelpunkt der Kante E auf dem Neumann-Rand bezeichnet. Testen Sie ihre Funktion am Beispiel `Lshape`.

(iv) Erweitern Sie das Skript `fem2d.m`, sodass die folgende Variationsformulierung gelöst werden kann: Suche $u \in H^1(\Omega)$, so dass $\forall v \in H^1(\Omega)$ und $\kappa \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_\Omega \nabla u^T \nabla v \; dx + \kappa \int_\Omega u\, v \; dx = \int_\Omega f\, v \; dx + \int_{\Gamma_N} g\, v \; ds - \int_\Omega \nabla u_D^T \nabla v \; dx - \kappa \int_\Omega u_D v \; dx. \tag{2}$$

Stellen Sie dazu die Massematrix M auf und testen Sie das Programm am Beispiel `Square` für $\kappa = 2$.

Bemerkung: Eine Matrix der Form $A := ((\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j)_{L^2})_{i,j}$ heißt *Steifigkeitsmatrix* oder *Element-Steifigkeitsmatrix*, falls $\varphi_{i,j}$ Elemente sind. Der Ausdruck stammt aus der Anwendung (klassische Mechanik), denn oft beschreiben diese Terme den Widerstand, den ein Element seiner Verformung entgegenbringt.

Eine Matrix der Form $M := ((\varphi_i, \varphi_j)_{L^2})_{i,j}$ heißt *Massenmatrix*. Dieser Ausdruck stammt ebenfalls aus der klassischen Mechanik, denn oft beschreibt der Ausdruck die Masse (eines Teilchens oder eines Elements).

Aufgabe 3 (FEM Wärmeleitungsgleichung, Matlab) (10 Punkte)

Die Wärmeleitungsgleichung ist für $T > 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(x,y,t) - \Delta u(x,y,t) &= f(x,y,t), \quad && \text{in } \Omega \times [0,T] \\
u(x,y,t) &= u_D(x,y,t), \quad && \text{auf } \Gamma_D \times [0,T] \\
\frac{\partial}{\partial n} u(x,y,t) &= g(x,y,t), \quad && \text{auf } \Gamma_N \times [0,T] \\
u(x,y,0) &= 0
\end{aligned}$$

Um die Wärmeleitungsgleichung zu lösen, verwenden wir ein implizites Euler-Verfahren in der Zeit. Dazu teilen wir das Zeitintervall in N äquidistante Teilintervalle der Länge $dt = \frac{T}{N}$ auf. Mit $u_k(x,y) := u(x,y,k \cdot dt)$ und $f_k(x,y) := f(x,y,k \cdot dt)$ erhalten wir in jedem Zeitschritt die Gleichung

$$u_{k+1} - dt \Delta u_{k+1} = u_k + dt f_{k+1}.$$

Die schwache Formulierung (bezüglich des Ortes) lautet dann (mit Homogenisierung der Dirichlet-Randbedingung)

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_{k+1}\, v \; dx + \int_\Omega u_{D,k+1}\, v \; dx + dt \cdot \int_\Omega \nabla u_{k+1}^T \nabla v \; dx \\
&\quad = \int_\Omega u_k\, v \; dx + dt \cdot \left(\int_\Omega f_{k+1}\, v \; dx + \int_{\Gamma_N} g_{k+1}\, v \; ds - \int_\Omega \nabla u_{D,k+1}^T \nabla v \; dx \right).
\end{aligned}$$

Mit gleichem Vorgehen wie in Aufgabe 4, Blatt 2 erhalten wir das LGS

$$(M + dt \cdot A) x_{k+1} = M x_k + dt \cdot \left(\int_\Omega f_{k+1}\, \varphi_j \; dx + \int_{\Gamma_N} g_{k+1}\, \varphi_j \; ds \right) - (M + dt \cdot A) u_{D,k+1}.$$

(i) Schreiben sie eine Funktion `fem2d_heat.m` die die Wärmeleitungsgleichung löst (viele Teile aus `fem2d.m` können übernommen werden). Speichern Sie die Lösungen in allen Zeitschritten in der Matrix `u` ab.

(ii) Stellen Sie den Temperaturverlauf graphisch dar.

(iii) Testen Sie ihr Programm am Beispiel `Square_heat`.