Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2018/2019

Übungsblatt 7

Besprechung 13.12.2018

Aufgabe 1 (H^1 Regularität) (5 Punkte)

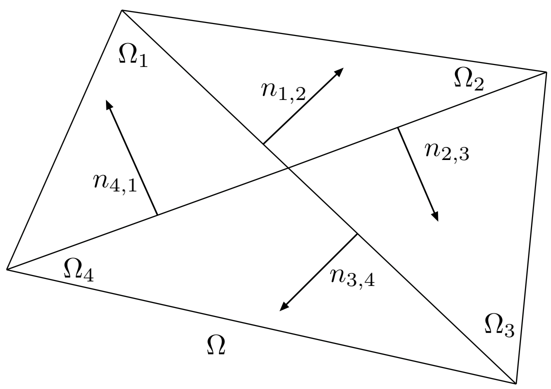
Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x\| < 1\}$, $u(x) = \|x\|^{2\alpha}$ (Euklidische Norm). Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion u in $H^1(\Omega)$ liegt.

Aufgabe 2 ($H(\mathrm{div}, \Omega)$) (10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein polygonales Gebiet, das in Teilgebiete (z.B. Dreiecke) $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, .., m$ geteilt ist mit

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{\Omega}_i \quad \text{und} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \ (i \neq j).$$

Darüber hinaus seien Ω_i, $i = 1, .., m$ reguläre Gebiete, in denen der Gauß'sche Integralsatz gilt.
Sei $z : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion, die mit $z_j := z|_{\Omega_j}$ der Bedingung $z_j \in (\mathcal{C}^1(\Omega_j))^n$ genügt.



Zeigen Sie: Falls für jede innere Kante $\Gamma_{j,k} := \overline{\Omega_j} \cap \overline{\Omega_k}$ mit der zugehörigen Normalen $n_{j,k}$ (zeigt von Ω_j nach Ω_k) gilt

$$z_j n_{j,k} = z_k n_{j,k} \quad \forall\ j, k = 1, ..., m,$$

dann ist $z \in H(\mathrm{div}; \Omega) := \{w \in (L^2(\Omega))^n : \mathrm{div}\, w \in L^2(\Omega)\}$.
Hinweis: Die Divergenz ist hier im schwachen Sinne zu verstehen, also

$$\int (\mathrm{div}\, z)\varphi dx = -\int z \cdot \nabla\varphi dx.$$

Aufgabe 3 (Konforme Methoden und Ansatzfunktionen) (10 Punkte)

Sei $k \geq 1$ und Ω beschränkt. Sei das Gebiet wieder in Dreiecke unterteilt $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{\Omega}_i$. Zeigen Sie, dass eine stückweise beliebig oft differenzierbare Funktion $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ genau dann zu $H^k(\Omega)$ gehört, wenn $v \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ gilt.

Hinweis: „Stückweise beliebig oft differenzierbar" ist in dieser Aufgabe wie folgt zu verstehen. Es gilt $v \in C^{\infty}(\overline{\Omega_i})$. Dabei werden die Werte auf dem Rand von Ω_i durch den punktweisen Limes fortgesetzt. Da nun für ein anderes Ω_j, das eine gemeinsame Kante mit Ω_i hat, der punktweise Limes an der gemeinsamen Kante, i.A., unterschiedlich ist, so haben wir eine „Doppelbelegung" an der gemeinsamen Kante. Um trotzdem noch eine wohldefinierte Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ zu erhalten, wählt man an der gemeinsamen Kante einfach eine der Definitionen aus. Welche Definition man dabei auswählt, also ob den linkseitigen oder den rechtseitigen Limes, ist für die Aufgabe unerheblich. Das gleiche Vorgehen führt man für die Ableitungen durch und erhält somit eine stückweise differenzierbare Funktion.