Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2018/2019

Übungsblatt 9

Besprechung 10.1.2019

Aufgabe 1 (Euler-Lagrange Gleichungen) (15 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, X ein Banachraum mit $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \subset X \subset W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Das Funktional $J : X \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$J(u) := \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))dx,$$

mit $f : C^1(\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbb{R})$, $(x, z, p) \mapsto \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}^m$ und $p \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Die Funktion f sei beschränkt mit beschränkten Ableitungen. Die Funktion $u \in X$ sei ein Minimierer von J, $J(u) = \inf\{J(v) : v \in X\}$.

(i) Zeige: $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ erfüllt im Distributionssinn für alle $1 \leq \alpha \leq m$

$$\partial_{z^\alpha} f(x, u(x), \nabla u(x)) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}[\partial_{p_j^\alpha} f(x, u(x), \nabla u(x))] = 0. \tag{1}$$

Bemerkung: Gleichung (1) nennt man die *Euler-Lagrange Gleichung* (zum Funktional J bzw. Funktion f). Es ist auch die *erste Variation von J in 0.*

(ii) Berechnen Sie die Euler-Lagrange Gleichung zu folgenden Lagrange Funktionen

(a) (Dirichlet-Form)

$$f(x, z, p) := \frac{1}{2}|p|^2 - f_0(x)z,\ z \in \mathbb{R},\ x, p \in \mathbb{R}^n$$

(b) (Nichtlineare Poisson-Gleichung)

$$f(x, z, p) := \frac{1}{2}|p|^2 + F(z),\ z \in \mathbb{R}^m,\ x, p \in \mathbb{R}^n$$

(c) (Minimale Graphen)

$$f(x, z, p) := \sqrt{1 + |p|^2},\ z \in \mathbb{R},\ x, p \in \mathbb{R}^n$$

Hinweise:

(i) Zur Erinnerung

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq k\}$$

und analog komponentenweise für vektorwertige Funktionen.

(ii) Unter *Distribution* verstehen wir hier $l \in (\mathcal{D}(\Omega))' := (C_0^1(\Omega))'$. Null im Distributionssinn für reguläre Distributionen l bedeutet also

$$\langle l, \varphi\rangle = \int_\Omega l\varphi dx = 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(iii) z^α bedeutet die Komponente α des Vektors z, der an der $n + 1$ Stelle anfängt. Analog p_j^α.

(iv) Die Beweistechnik ist sehr ähnlich zum Beweis in Satz 4.2.5 im Skript (Charakterisierungssatz).

Bemerkung: Überlegen Sie sich, welche Rolle eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ hier spielt. Vergleiche mit Variationsformulierung.

Aufgabe 2 (Koerzivitäts- und inf-sup Konstante) (5 Theorie + 10 Matlab Punkte)

Es sei $\mathcal{X} = H_0^1(\Omega)$, $(\cdot,\cdot)_1$ das H^1-Skalarprodukt und $\|\cdot\|_1$ die H^1-Norm. Ferner sei für $b \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ die Bilinearform $a : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u^T \nabla v \, dx + \int_\Omega b^T \nabla u \, v \, dx + \gamma \int_\Omega u \, v \, dx.$$

Sei $S(\mathcal{T}_h) \subset \mathcal{X}$ der diskrete Ansatz-Raum, der von den Hutfunktionen φ_i aufgespannt wird, A die Matrix, die zur Bilinearform a assoziiert ist, und M die Matrix, die zum H^1-Skalarprodukt assoziiert ist ($M_{j,i} := \int_\Omega \nabla\varphi_i^T \nabla\varphi_j \, dx + \int_\Omega \varphi_i^T \varphi_j \, dx$).
In dieser Aufgabe wollen wir

$$\alpha_h := \inf_{v \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{a(v,v)}{\|v\|_1^2} \tag{2}$$

$$\beta_h := \inf_{v \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \sup_{w \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{a(v,w)}{\|v\|_1 \, \|w\|_1} \tag{3}$$

numerisch bestimmen.

(i) Falls nötig, erweitern Sie das Paket `fem2d` derart, dass die Matrix A berechnet wird. Schreiben Sie weiter die Funktionen `alpha = CoerzRand(A,M,N)` und `beta = InfSupRand(A,M,N)`, die die Konstanten α_h und β_h approximieren. Dazu sollen jeweils N Zufallsvektoren als Koeffizientenvektoren von v und w angelegt werden und das Supremum bzw. Infimum durch das Maximum bzw. Minimum der Einträge berechnet werden. Achten Sie bei der Implementierung auf die Vektorisierung in MATLAB (keine `for`-Schleifen!).

(ii) Alternativ kann man die Berechnung beider Konstanten auch auf Eigenwertprobleme (EWP) zurückführen. Zeigen Sie: α_h ist der kleinste Eigenwert des verallgemeinerten EWP

$$A_s x = \lambda M x,$$

wobei $A_s := \frac{1}{2}(A + A^T)$ den symmetrischen Anteil von A bezeichnet.

(iii) Um die inf-sup-Konstante auf ein passendes EWP zurückzuführen definieren wir einen Operator T mit

$$T : S(\mathcal{T}_h) \to S(\mathcal{T}_h)$$
$$(Tw, v)_1 = a(w,v) \quad \forall\, v \in S(\mathcal{T}_h).$$

Der Satz von Riesz liefert uns dann

$$\|Tw\|_1 = \|a(w,\cdot)\|_{-1} =: \sup_{v \in S(\mathcal{T}_h)} \frac{A(w,v)}{\|v\|_1}.$$

Damit erhalten wir

$$\beta_h^2 := \left(\inf_{v \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \sup_{w \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{a(v,w)}{\|v\|_1 \, \|w\|_1} \right)^2 = \inf_{v \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{\|Tw\|^2}{\|w\|_1^2} = \inf_{v \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{(Tw,Tw)_1}{(w,w)_1}$$

Aus der Definition des Operators T erhalten wir die Matrix-Darstellung $T = M^{-1}A^T$ (wieso?). Damit ergibt sich

$$\beta_h^2 = \inf_{v \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{(Tw,Tw)_1}{(w,w)_1} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{x^T A M^{-1} M M^{-T} A^T x}{x^T M x} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{x^T A M^{-1} A^T x}{x^T M x}.$$

Also ist β_h die Wurzel des kleinstes EW von

$$AM^{-1}A^T x = \lambda M x.$$

Erweitern Sie Ihr Skript, sodass die Konstanten α_h und β_h über ein EWP berechnet werden.

(v) Erweitern Sie Ihr Skript, sodass die Ausgangstriangulierung mehrfach verfeinert wird und berechnen Sie die Konstanten zu jeder Triangulierung. Plotten Sie die Konstanten in Abhängigkeit der Freiheitsgrade. Was stellen Sie fest?