Prof. Dieter Rautenbach
Dr. Lucia Draque Penso
Felix Joos

Ausgewählte Kapitel der Graphentheorie

Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 06. Juni 2012

1. Sei $k \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie einen effizienten Algorithmus, der für Graphen mit Baumweite höchstens k eine unabhängige Menge größter Kardinalität bestimmt.
   Tipp: Betrachten Sie die möglichen Schnitte unabhängiger Mengen mit X_t.

2. Die *Wegweite* $pw(G)$ eines Graphen G ist die minimale Weite einer Baumzerlegung $(T, (X_t)_{t \in V(T)})$ von G, für die T ein Weg ist.

   Sei T_k der vollständige ternäre Baum der Tiefe k.

   (a) Zeigen Sie $pw(T_k) \geq pw(T_{k-1}) + 1$.
   (b) Geben Sie eine Wegzerlegung von T_k der Weite $k - 1$ an.

   Tipp: (a) Betrachten Sie ein Wegzerlegung von T_k und extrahieren Sie eine ein Wegzerlegung von T_{k-1}.
   (b) Wählen Sie die Menge der Blätter von T_k als Eckenmenge des Weges. Für ein Blatt t sei X_t die Menge, die t und alle Vorgänger von t enthält.

3. Ein Graph G ist ein *Intervalgraph*, falls eine Abbildung $I : V(G) \to \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, x \leq y\}$ mit

   $$\forall u \in V(G) : \forall v \in V(G) \setminus \{u\} : uv \in E(G) \Leftrightarrow I(u) \cap I(v) \neq \emptyset$$

   existiert.

   Für jeden Graphen G gilt $pw(G) = \min_H(\omega(H) - 1)$ wobei das Minimum über alle Intervalgraphen H gebildet wird, die G als Teilgraphen enthalten.

4. Sei G ein Graph.

   - Für eine Menge X von Ecken von G sei ∂X die Menge der Ecken u in X mit einem Nachbarn in $V(G) \setminus X$.
   - Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\mathcal{B}_n(G)$ rekursiv wie folgt definiert.
     – $\emptyset \in \mathcal{B}_n(G)$.
     – Ist $X \in \mathcal{B}_n(G)$ und $X \subseteq Y \subseteq V(G)$ so, dass $|\partial X| + |Y \setminus X| \leq n$, so gilt $Y \in \mathcal{B}_n(G)$.

   Sei G ein Graph und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

   - Eine Menge X gehört genau dann zu $\mathcal{B}_n(G)$, wenn eine Folge

     $$\emptyset = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_s = X$$

     existiert mit $|\partial X_i| + |X_{i+1} \setminus X_i| \leq n$ für $0 \leq i \leq s - 1$.
   - Ist $(T, (X_t)_{t \in V(T)})$ eine Wegzerlegung von G der Weite höchstens $n - 1$ mit $T : t_1 t_2 \ldots t_s$, so gilt $X_1 \cup \ldots \cup X_r \in \mathcal{B}_n(G)$ für $1 \leq r \leq s$, d.h. insbesondere gilt $V(G) \in \mathcal{B}_n(G)$.
   - Gilt $V(G) \in \mathcal{B}_n(G)$, so folgt $pw(G) < n$.