Prof. Dieter Rautenbach
Dr. Lucia Draque Penso
Felix Joos

Ausgewählte Kapitel der Graphentheorie

Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 20. Juni 2012

1. Welchen gelabelten Graphen beschreibt folgender Cliquenweiteausdruck

$$\eta_{2,3}(((\rho_{2\to 1}(\eta_{2,3}((\eta_{1,2}(1(v_1)\oplus 2(v_2)))\oplus 3(v_3))))\oplus 2(v_4))\oplus(\eta_{1,3}((\eta_{1,2}(1(v_5)\oplus 2(v_6)))\oplus 3(v_7)))).$$

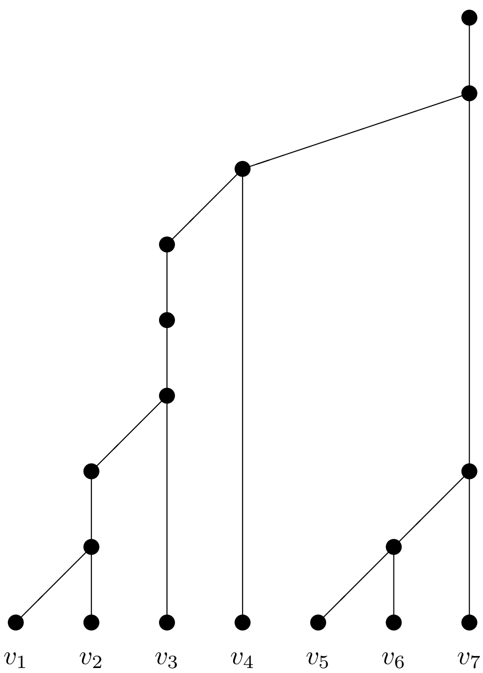
2. (a) Bestimmen Sie die Cliquenweite von Bäumen und vollständigen Graphen.
   (b) Zeigen Sie, dass die Cliquenweite des $k \times k$-Gitters höchstens $k+2$ ist.

3. Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann Cliquenweite höchstens 2 besitzt, wenn er P_4-frei ist.

   Tipp 1: Wieso reicht es zu zeigen, dass $cw(P_4) = 3$ ist?

   Tipp 2: Ist G P_4-frei, so ist entweder G oder $\overline{G}$ nicht zusammenhängend.

4. Sei E ein Cliquenweiteausdruck mit Labeln aus der Menge L für einen Graphen G. Sei T der E unterliegende verwurzelte Baum, d.h. die Blätter von T sind die Ecken von G und jede innere Ecke von T hat ein oder zwei Kinder. Für den Ausdruck aus Aufgabe 1 wäre T zum Beispiel folgender Baum.



   Für eine Ecke s von T bezeichne V_s die Menge der Blätter von T, die s oder ein Nachfolger von s sind. Weiter sei H_s der Graph mit der Eckenmenge V_s, in dem zwei Ecken u und v genau dann adjazent sind, wenn $N_G(u) \setminus V_s \neq N_G(v) \setminus V_s$ gilt.

   Zeigen Sie, die folgenden Aussagen.

(a) Für jede Ecke s von T ist H_s ein vollständiger multipartiter Graph.

(b) Sind s' und s'' die beiden Kinder einer inneren Ecke s von T, so ist jede Partitionsmenge von H_s die Vereinigung von Partitionsmengen von $H_{s'}$ und $H_{s''}$.

(c) Für jede Ecke s von T gilt $|L| \geq \chi(H_s)$.

(d) $cw(G) \leq 2\max\{\chi(H_s) \mid s \text{ ist Ecke von } T\}$.

(e) $cw(\bar{G}) \leq 2cw(G)$.