Dr. Christian Löwenstein
Thomas Sasse
Michael Gentner

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Wintersemester 2014/15

Übungen zur Kombinatorik

Übungsblatt 1

Abgabe: 31. Oktober 2014, vor der Vorlesung (12:15 Uhr)

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Auf 100 Elefanten werden 1600 Bananen verteilt, wobei einige Elefanten auch leer ausgehen können. Man beweise, dass es – ganz gleich, wie die Verteilung erfolgt – stets mindestens vier Elefanten mit derselben Anzahl von Bananen gibt.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Berechnen Sie für ungerade n

$$\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2k+1}.$$

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Beweisen Sie: Jede Menge mit n natürlichen Zahlen enthält eine Teilmenge, so dass gilt: die Summe aller Elemente dieser Teilmenge ist durch n teilbar.

Tipp: Betrachten Sie die Teilmengen $\{n_1\}, \{n_1, n_2\}, \{n_1, n_2, n_3\}, \ldots, \{n_1, n_2, \ldots, n_n\}$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

(a) Wie viele Teilmengen von $[n+1]$ besitzen als maximales Element die Zahl $k+1$?

(b) Wie viele Teilmengen X von $[n+1]$ erfüllen $\max X - \min X = k$?

(c) Zeigen Sie $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

(d) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{n+1} (n+1-k)2^{k-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Sei $n \geq 3$. Mit $G^3(n)$ bezeichnen wir die Anzahl aller 3-elementigen Teilmengen $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sodass die Summe der Elemente von A gerade ist. Berechnen Sie $G^3(n)$.