Dr. Christian Löwenstein
Thomas Sasse
Michael Gentner

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Wintersemester 2014/15

Übungen zur Kombinatorik

Übungsblatt 2

Abgabe: 14. November 2014, vor der Vorlesung (12:15 Uhr)

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Auf wie viele verschiedene Arten können k nicht unterscheidbare Figuren auf einem $n \times n$-Schachbrett platziert werden, wenn

(a) keine Einschränkungen gemacht werden,

(b) in jeder waagerechten Reihe höchstens eine Figur stehen soll,

(c) in jeder waagerechten Reihe höchstens eine und in jeder senkrechten Reihe mindestens eine Figur stehen soll?

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Zeigen Sie für $n, k \in \mathbb{N}$:

(a)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}.$$

(b) Für $n \equiv 0 \pmod 2$ gilt
$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{n/2-1} < \binom{n}{n/2} > \binom{n}{n/2+1} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

(c) Für $n \equiv 1 \pmod 2$ gilt
$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

Aufgabe 3. (6 Punkte)

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \{(i,j,k) \in [n]^3 \mid i \leq k, j \leq k\}$. Bestimmen Sie kombinatorisch die jeweiligen Kardinalitäten folgender Mengen:

(i) $A_n^1 = \{(i,j,k) \in A_n \mid i < j\}$
(ii) $A_n^2 = \{(i,j,k) \in A_n \mid i = j\}$
(iii) $A_n^3 = \{(i,j,k) \in A_n \mid i > j\}$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) die Summe der ersten n Quadratzahlen.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Sei A_n die Anzahl der verschiedenen Belegungen eines $2 \times n$-Rechteck mit (nicht unterscheidbaren) 2×1-Dominosteinen.

(a) Geben Sie die Werte für $(A_n)_{n \in [5]}$, an, indem Sie alle Belegungen zeichenen (vgl. Abbildung 1 für $n = 3$).

(b) Geben Sie für $n \geq 3$ eine Rekursionsvorschrift für A_n an und begründen Sie deren Richtigkeit. Stellen Sie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit einer bereits bekannten Folge dar.

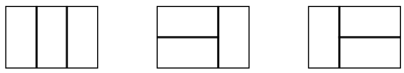

Abbildung 1: Alle Belegungen eines 2×3-Rechteck mit 2×1-Dominosteinen, d.h. $A_3 = 3$.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Zeigen Sie durch einen kombinatorischen Beweis die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$