Dr. Christian Löwenstein
Thomas Sasse
Michael Gentner

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Wintersemester 2014/15

Übungen zur Kombinatorik

Übungsblatt 4

Abgabe: 12. Dezember 2014, vor der Vorlesung (12:15 Uhr)

Aufgabe 1. (6 Punkte)

(a) Für $n, k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}_0$ sei $s_{n,k,\ell}$ die Anzahl der Permutationen von $[n]$, die das Produkt von genau k disjunkten Zyklen sind und die Zyklen $(1), (2), \ldots, (\ell)$ enthalten und den Zyklus $(\ell + 1)$ nicht enthalten. Zeigen Sie, dass

$$s_{n,k,\ell} = (n - \ell - 1)s_{n-\ell-1,k-\ell}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$s_{m+n+1,m} = \sum_{k=0}^{m} (n + k)s_{n+k,k}.$$

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Zeigen Sie folgende Aussage: Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Die Anzahl der verschiedenen (ungeordneten) Zahlpartitionen von n in k unterschiedliche ganze positive Summanden ist gleich der Anzahl der verschiedenen (ungeordneten) Zahlpartitionen von $n - \binom{k}{2}$ in k ganze positive Summanden.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Anzahl der nicht-kongruenten Dreiecke mit Umfang n und ganzzahligen Seitenlängen. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

(a) $A_{2n} = A_{2n-3}$ und

(b) $A_{2n} = P_{n,3}$.

Tipp zu (b): Zeigen Sie, dass es für $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $n = x + y + z$ ein Dreieck mit Seitenlängen $x + y$, $x + z$, $y + z$ und Umfang $2n$ gibt.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei P_n die Anzahl der Zahlpartitionen von n in positive ganze Summanden, d.h. $P_n = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}$. Zeigen Sie:

(a) Die Anzahl der Zahlpartitionen von n in positive ganze Summanden, die alle gerade sind, ist $P_{n/2}$.

(b) Die Anzahl der Zahlpartitionen von n in positive ganze Summanden, in denen jeder Summand mit einer geraden Vielfachheit auftaucht, ist $P_{n/2}$.

(c) Die Anzahl der Zahlpartitionen von n in positive ganze Summanden, die alle mindestens 2 sind, ist $P_n - P_{n-1}$.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Seien $s, m, n \in \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie für $n \geq m$ das $(s+m+1) \times (n-m)$-Gitter. Wie aus der Vorlesung bekannt ist ein *Gitterweg* ein Weg durch ein Gitter, der nur aus $(1,0)$- oder $(0,1)$-Schritten besteht.

(a) Wie viele verschiedene Gitterwege von $(0,0)$ zu (s,k) gibt es für ein festes k?

(b) Wie viele verschiedene Gitterwege von (s,k) zu $(s+m+1, n-m)$ gibt es für ein festes k?

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und (b) die folgende Variante der Vandermonde Identität:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s+k}{k} \binom{n-k}{m} = \binom{s+n+1}{s+m+1}.$$