Dr. Christian Löwenstein
Thomas Sasse
Michael Gentner

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Wintersemester 2014/15

Übungen zur Kombinatorik

Übungsblatt 5

Abgabe: 09. Januar 2015, vor der Vorlesung (12:15 Uhr)

Aufgabe 1. (2+4 Punkte)

(a) Wie viele verschiedene Wörter kann man aus den Buchstaben des Wortes WEIHNACHTEN konstruieren?

(b) Wie viele verschiedene Wörter kann man aus den Buchstaben des Wortes WEIHNACHTEN konstruieren, so dass nie zwei gleiche Buchstaben nebeneinander stehen?

Ein Wort muss dabei keinen Sinn ergeben, aber alle Buchstaben enthalten.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Sei D_n so definiert wie in Beispiel 3.5 der Vorlesung.

(a) Zeigen Sie

$$n! \sum_{k>n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{(n+1)!}{(k+n+1)!}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| < \frac{1}{n+1}.$$

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (b), dass für $n \in \mathbb{N}$

$$D_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x \cdot \binom{x+n}{n}}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$\frac{x}{x+n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{\binom{x+k}{k}}.$$

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Wie viele natürliche Zahlen kleiner als eine Million sind nicht von der Form n^2 oder n^3 oder n^5, mit $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Seien D_n und $D_{n,k}$ so definiert wie in Beispiel 3.5 der Vorlesung.

(a) Zeigen Sie, dass

$$D_n - D_{n,1} = (-1)^n.$$

(b) Leiten Sie mit Hilfe von (a) eine rekursive Formel für D_n her.

Bonusaufgabe 1. (6 Punkte)
Eine Gruppe von 8 Personen wichtelt auf einer Weihnachtsfeier. (Das heißt jeder der Gruppe bringt ein Geschenk mit. Während der Feier erhält jeder der Gruppe (zufällig, jede Verteilung ist gleichwahrscheinlich) ein Geschenk zurück.)

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlickeit, dass keine Person der Gruppe ihr eigenes Geschenk zurückerhält?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlickeit, dass genau 4 Personen der Gruppe ihre eigenen Geschenke zurückerhalten?