Dr. Christian Löwenstein
Dr. Dirk Meierling

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Sommersemester 2014

# Probabilistische Methoden

## Übungsblatt 1

Besprechung: 06. Mai 2014

**Aufgabe 1.** Beweisen Sie Satz 1.4 der Vorlesung:

**Satz 1.4** Sei $x \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$, $d \geq 0$, $n \geq k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

(a) $(1+x)^d \leq e^{xd}$

(b) $(1-x)^d \leq e^{-xd}$

(c) $a^{x \cdot \log_c b} = b^{x \cdot \log_c a}$

(d) $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$

(e) $\binom{n}{k} \leq 2^n$

(f) $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$

(g) $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$ für $k \neq 0$.

**Aufgabe 2.** Sei $m(k)$ so definiert wie im Kontext der Sätze 1.7-1.9 der Vorlesung. Beweisen Sie $m(4) \geq 15$.

**Aufgabe 3.**

(a) Sei $G$ ein Graph mit Ordnung $n(G)$, Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ und fraktionaler chromatischer Zahl $\chi^f(G)$. Beweisen Sie $\chi^f(G) \geq n(G)/\alpha(G)$.

(b) Bestimmen Sie $\chi^f(C_{2k+1})$ für alle $k \geq 1$.

**Aufgabe 4.** Für $n \geq 1$ sei $\sigma \in S_n$ eine zufällige Permutation und für $1 \leq t \leq n$ sei $X_{n,t}$ die Anzahl der $t$-elementigen Teilmengen $\{n_1, \ldots, n_t\}$ von $[n]$ mit $n_1 < \ldots < n_t$ und $\sigma(n_1) < \ldots < \sigma(n_t)$.

(a) Zeigen Sie $E[X_{n,t}] \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \leq \sqrt{n}$.

(b) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} E[X_{n,t}] = 0$ für $t = 3\sqrt{n}$.