Dr. Christian Löwenstein
Dr. Dirk Meierling

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Sommersemester 2014

Probabilistische Methoden

Übungsblatt 2

Besprechung: 20. Mai 2014

Definition: Für einen Graphen G nennt man die Menge $T \subseteq V(G)$ mit

$$\forall v \in V(G) : N_G(v) \cap T \neq \emptyset$$

eine *totale Dominanzmenge* von G. Die kleinste Kardinalität einer totalen Dominanzmenge in G ist die *totale Dominanzzahl* $\gamma_t(G)$ von G.

Aufgabe 1. (halbe Aufgabe)
Sei G ein Graph mit Minimalgrad $\delta(G) \geq 1$, Ordnung $n(G)$ und totaler Dominanzzahl $\gamma_t(G)$. Beweisen Sie

$$\gamma_t(G) \leq \frac{1 + \log(\delta(G))}{\delta(G)} n(G).$$

Definition: Ein *Turnier* ist ein gerichteter Graph, bei dem zwischen je zwei Ecken genau eine gerichtete Kante verläuft. Ein *Hamiltonscher Weg* in einem gerichteten Graphen ist ein gerichteter Weg, der jede Ecke genau einmal enthält.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie: Es existiert ein Turnier der Ordnung n mit mindestens $\frac{n!}{2^{n-1}}$ vielen Hamiltonschen Wegen.

Aufgabe 3.
Für $\ell \geq 3$ sei $\epsilon = \frac{1}{2\ell}$ und $p = n^{\epsilon - 1}$.

(a) Begründen Sie, dass K_n genau $\frac{1}{2}(i-1)!\binom{n}{i}$ Kreise der Länge i für $3 \leq i \leq n$ hat.

(b) Sei X die Anzahl der Kreise der Länge $\leq \ell$ im Zufallsgraphen $G(n,p)$. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X \geq \frac{n}{2}] = 0$.

(c) Sei Y die Anzahl der unabhängigen Mengen der Kardinalität $\frac{3}{p}(1 + \log n)$ in $G(n,p)$. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y] = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass für jedes genügend große k und jedes $\ell \geq 3$ ein Graph G der Ordnung k existiert mit $\alpha(G) < 3(2k)^{1-\epsilon}(2 + \log k)$, der keinen Kreis der Länge $\leq \ell$ enthält.

Definition: Sei G ein Graph. Eine Teilmenge C der Eckenmenge von G ist eine *Clique*, falls je zwei Ecken aus C in G adjazent sind. Die größte Kardinalität einer Clique in G ist die *Cliquenzahl* $\omega(G)$ von G.

Aufgabe 4.
Sei G ein Graph mit Maximalgrad $\Delta(G)$, Ordnung $n(G)$, Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ und Cliquenzahl $\omega(G)$. Weiter sei $\mathcal{I}^*$ die Menge aller unabhängigen Mengen von G mit maximaler Kardinalität.

(a) Sei $I \in \mathcal{I}^*$ zufällig gewählt. Beweisen Sie für alle $v \in V(G)$

$$(\omega(G) + 1)\mathbb{P}[v \in I] + \mathbb{E}[|I \cap N(v)|] \geq 2.$$

(*Tipp:* Betrachten Sie die beiden Fälle, ob $W = N_G(v) \setminus N_G(I_v)$ mit $I_v = I \setminus N_G[v]$ eine Clique ist oder nicht.)

(b) Beweisen Sie

$$\alpha(G) \geq \frac{2n(G)}{\Delta(G) + \omega(G) + 1}.$$

Aufgabe 5. (halbe Aufgabe)
Für $k \geq 1$ sei $n = \binom{2k-1}{k}$. Zeigen Sie, dass $\chi^\ell(K_{n,n}) > k$.