Dr. Christian Löwenstein
Dr. Dirk Meierling

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Sommersemester 2014

# Probabilistische Methoden

## Übungsblatt 3

Besprechung: 03. Juni 2014

**Aufgabe 1.** (halbe Aufgabe)
Zeigen Sie, dass falls

$$e \cdot \binom{k}{2} \cdot \binom{n-2}{k-2} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \leq 1$$

gilt, es eine Funktion $c : E(K_n) \to \{rot, blau\}$ auf den Kanten des $K_n$ gibt, so dass $K_n$ keinen monochromatischen $K_k$ als Teilgraph besitzt.

**Aufgabe 2.** (halbe Aufgabe)
Sei $G$ ein Graph mit Maximalgrad $\Delta$. Sei $V_1, \ldots, V_t$ eine Partition von $V(G)$ mit $|V_i| \geq 2e\Delta$ für alle $i \in [t]$. Zeigen Sie, dass $G$ eine unabhängige Menge $I$ besitzt mit $I \cap V_i \neq \emptyset$ für alle $i \in [t]$.

**Aufgabe 3.**

(a) Sei $G$ ein Graph und seien $L_v$ für alle $v \in V(G)$ Listen der Kardinalität $6r$ mit $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $G$ eine $\mathcal{L}$-Listenfärbung besitzt mit $\mathcal{L} = (L_v)_{v \in V(G)}$, falls

$$\forall v \in V(G) : \forall i \in L_v : |\{w \in N_G(v) \mid i \in L_w\}| \leq r.$$

**Hinweis:** Betrachten Sie für $vw \in E(G)$ mit $c \in L_v \cap L_w$ das Ereignis $A_{v,w,c}$, dass $v$ und $w$ mit Farbe $c$ gefärbt sind.

(b) Sei $G$ ein Graph mit Maximalgrad $\Delta$. Seien $L_v$ für alle $v \in V(G)$ Listen. Jede Farbe $c \in L_v$ habe ein Gewicht $w_v(c)$, so dass $\sum_{c \in L_v} w_v(c) = 1$. Zeigen Sie, dass $G$ eine $\mathcal{L}$-Listenfärbung besitzt mit $\mathcal{L} = (L_v)_{v \in V(G)}$, falls

$$\forall uv \in E(G) : \sum_{c \in L_v \cap L_w} w_u(c) w_v(c) \leq \frac{1}{2e\Delta}.$$

**Aufgabe 4.**
Beweisen Sie Folgerung 3.5 aus der Vorlesung.

**Hinweis:** Setze $x_i = (2p)^{t_i}$. Wie groß muss $\alpha$ sein, so dass $(1-x) \geq e^{-\alpha x}$ für alle $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ gilt?

**Definition:** Eine (zulässige) *Kantenfärbung* eines Graphen $G$ ist eine Abbildung $c : E(G) \to \mathbb{N}$, die adjazenten Kanten $e, f \in E(G)$ unterschiedliche Werte (Farben) $c(e) \neq c(f)$ zuweist.

**Aufgabe 5.**
Zeigen Sie, dass für jeden Graphen $G$ mit Maximalgrad $\Delta$ eine Kantenfärbung $c : E(G) \to [17\Delta]$ existiert, so dass $G$ keinen 2-farbigen Kreis enthält.

**Hinweis:** Färbe die Kanten zufällig und betrachte die folgenden Ereignisse:
Für zwei adjazente Kanten $e, f$ sei $A_{e,f}$ das Ereignis, dass $c(e) = c(f)$. Sei

$$\mathcal{A}_2 = \{A_{e,f} \mid e, f \text{ sind adjazent in } G\}.$$

Für einen Kreis $C$ gerader Länge in $G$ sei $A_C$ das Ereignis, dass $C$ mit 2 Farben alternierend gefärbt ist. Für $k \geq 2$ sei

$$\mathcal{A}_{2k} = \{A_C \mid C \text{ ist ein Kreis der Länge } 2k \text{ in } G\}.$$