Dr. Christian Löwenstein
Dr. Dirk Meierling

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Sommersemester 2014

Probabilistische Methoden

Übungsblatt 4

Besprechung: 17. Juni 2014

Aufgabe 1. (doppelte Aufgabe)

(a) Sei G ein zusammenhängender Graph. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) G besitzt einen spannenden Baum T mit Wurzel r, für den die Menge der Kinder jeder Ecke eine unabhängige Menge ist. (Tipp: Maximieren Sie die Summe aller Tiefen.)

(ii) G besitzt eckendisjunkte induzierte bipartite Teilgraphen $G_1, \ldots, G_k$ mit

$$m(G_1) + \cdots + m(G_k) \geq \frac{n(G) - 1}{2}.$$

(Tipp: Betrachten Sie T aus (i) und "schneiden" Sie die G_i "unten" ab.)

(iii) G besitzt einen bipartiten Teilgraphen mit mindestens

$$\frac{m(G)}{2} + \frac{n(G) - 1}{4}$$

Kanten. (Tipp: Statt die Ecken zufällig den beiden Paritionsmengen zuzuweisen, verfahren Sie entsprechend mit jeweils einer Partitonsmenge der G_i.)

(iv) G besitzt einen bipartiten Teilgraphen mit mindestens

$$\frac{m(G)}{2} + \frac{1}{8}\left(\sqrt{8m(G) + 1} - 1\right)$$

Kanten.

(b) Zeigen Sie mit der Chernoff-Ungleichung fast alle Graphen der Ordnung n keinen bipartiten Teilgraphen mit mindestens $\frac{n^2}{8} + \frac{n^{\frac{3}{2}}}{3}$ Kanten besitzt.

Aufgabe 2.
Sei H ein k-uniformer Hypergraph mit Maximalgrad Δ, d.h. jede Ecke von H ist in höchstens Δ vielen Hyperkanten enthalten. Zeigen Sie mit der Chernoff-Ungleichung und LLL, dass

$$\operatorname{disc}(H) \leq \sqrt{2k(2 + \log k + \log \Delta)}.$$

Aufgabe 3.

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und gleichverteilte ± 1-Variablen und sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie für $0 < t \leq n$ und $\frac{n+t}{2} \in \mathbb{N}$, dass

$$\mathbb{P}[S_n \geq t] \geq e^{-\frac{t^2}{n}} \cdot \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

gilt. Tipps:

- Wieviele X_i müssen gleich 1 sein, damit $S_n \geq t$ gilt?
- Wieso gilt $\mathbb{P}[S_n \geq t] \geq \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+t}{2}}$?
- Verwenden Sie $n! = (1 + o(1))\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.