Dr. Christian Löwenstein
Dr. Dirk Meierling

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Sommersemester 2014

Probabilistische Methoden

Übungsblatt 5 und 6

Besprechung: 08. Juli 2014 und 22. Juli 2014

Aufgabe 1. (Beweis von Satz 3.11) (doppelte Aufgabe)
Sei $p = \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/4}$ und sei $A(G)$ die azyklische chromatische Zahl von G. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für fast alle Graphen G aus $G(n,p)$ gilt $\Delta(G) \leq 2np$. (Tipp: nutzen Sie die einfache Konzentrationsungleichung)

(b) Sei G eine zufällige Realisierung von $G(n,p)$. Sei $f : V(G) \to [r]$ mit $r \leq \frac{n}{2}$. Partitioniere je eine maximale Teilmenge gerader Kardinalität jedes $f^{-1}(i)$ mit $i \in [r]$ in 2-elementige Teilmengen. Seien $V_1, \ldots, V_k$ diese 2-elementigen Teilmengen. Zeigen Sie:

(i) $k \geq \frac{n}{4}$

(ii) Gilt für $1 \leq i < j \leq k$, dass $E(V_i, V_j) = 4$, dann ist f keine azyklische Färbung.

(iii) Die Wahrscheinlichkeit, dass f eine azyklische Färbung ist, ist höchstens

$$(1-p^4)^{\binom{\lceil n/4 \rceil}{2}}.$$

(c) Für fast alle Graphen G aus $G(n,p)$ gilt $A(G) > \frac{n}{2}$. (Tipp: nutzen Sie (b))

(d) Es gibt ein $c > 0$, so dass für fast alle Graphen G aus $G(n,p)$ mit Maximalgrad Δ

$$A(G) > c \cdot \frac{\Delta^{4/3}}{(\log \Delta)^{1/3}}$$

gilt. (Tipp: nutzen Sie (a) und (c))

Aufgabe 2. (Beweis von Behauptung 1 aus dem Beweis von Satz 5.4) (doppelte Aufgabe)

(a) Sei G ein bipartiter Graph mit Bipartion $V(G) = X \cup Y = \{x_1, \ldots, x_s\} \cup \{y_1, \ldots, y_t\}$. Zeigen Sie, G hat einen Teilgraphen H mit $d_H(x_i) = d_i$ für $i \in [s]$ und $0 \leq d_H(y_j) \leq 1$ für $j \in [t]$ genau dann, wenn

$$\left| \bigcup_{x_i \in A} N_G(x_i) \right| \geq \sum_{x_i \in A} d_i \text{ für alle } A \subseteq X.$$

(b) Sei G eine zufällige Realisierung des $G(n, \frac{1}{2})$. Sei $k = \lceil \sqrt{\log_2 n} + \frac{1}{2} \rceil$, und $t = \lfloor \frac{n}{k+2} \rfloor$. Sei $T \in \binom{V(G)}{t}$ und $W = V(G) \setminus T$.

(i) Sei $A \subseteq T$ und $a = |A|$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Ecken aus A weniger als ka Nachbarn aus W haben, höchstens

$$\sum_{0 \le u < ka} \binom{n-t}{u} 2^{-a(n-t-u)}$$

ist.

(ii) Zeigen Sie für genügend große n, dass

$$\sum_{0 \le u < ka} \binom{n-t}{u} 2^{-a(n-t-u)} < 2^{-\frac{at}{2}}.$$

(iii) Zeigen Sie folgende Aussage: Fast alle Graphen G haben t eckendisjunkte Sterne der Ordnung $k+1$ als Teilgraphen, deren Zentren die t Ecken aus T sind.

Aufgabe 3. (Beweis von Satz 5.3) (doppelte Aufgabe)
Sei G eine zufällige Realisierung des $G(n, \frac{1}{2})$. Sei $s = \left\lceil \frac{n}{\sqrt{\log_2 n - 3 \log_2 \log_2 n}} \right\rceil$. Eine Partition $V_1, \ldots, V_s$ von $V(G)$ heißt *zulässig*, falls $E(V_i, V_j) \neq \emptyset$ für $1 \le i < j \le s$. Sei $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_s\}$ eine Partition von $V(G)$ und sei $n_i = |V_i|$ für $i \in [s]$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gibt höchstens n^n viele Partitionen von $V(G)$ in s Teilmengen. (Die Abschätzung ist sehr großzügig.)

(b)
$$\mathbb{P}[G \text{ hat eine zulässige Partition}] \le n^n \exp\left(-\sum_{1 \le i < j \le s} 2^{-n_i n_j}\right)$$

(c)
$$\sum_{1 \le i < j \le s} 2^{-n_i n_j} \binom{s}{2}^{-1} \ge 2^{-\frac{n^2}{s^2}} \text{ (schwer, aber kurz)}$$

(d)
$$\log\left(\mathbb{P}[G \text{ hat eine zulässige Partition}]\right) \to -\infty \text{ für } n \to \infty$$

(e) Für fast alle Graphen G gilt $\mathrm{ccl}'(G) \le \frac{n(G)}{\sqrt{\log_2 n(G) - 1}}$.

Definition (wie in der Vorlesung)
Sei G ein Graph. Die *Kontraktionscliquenzahl* $\mathrm{ccl}(G)$ ist das maximale s, so dass $V(G)$ s nichtleere disjunkte Teilmengen $V_1, \ldots, V_s$ besitzt, wobei $G[V_i]$ zusammenhängend ist für $i \in [s]$ und $E[V_i, V_j] \neq \emptyset$ für $1 \le i < j \le s$.
$\mathrm{ccl}'(G)$ ist definiert als das maximale s, so dass sich $V(G)$ in s nichtleere Mengen $V_1, \ldots, V_s$ partionieren lässt, wobei $E[V_i, V_j] \neq \emptyset$ für $1 \le i < j \le s$.