Probabilistische Methode und Färbungen von Graphen
Wintersemester 2012/13 Dr. Christian Löwenstein

# Übungsblatt 1

**Aufgabe 1:**
Sei $G$ ein Graph mit Minimalgrad $\delta(G) \geq 1$, Ordnung $n(G)$ und Dominanzzahl $\gamma(G)$. Beweisen Sie $\gamma(G) \leq n(G)/2$.

**Definition:** Für einen Graphen $G$ nennt man die Menge $T \subseteq V(G)$ mit

$$\forall v \in V(G) : N_G(v) \cap T \neq \emptyset$$

eine *totale Dominanzmenge* von $G$. Die kleinste Kardinalität einer totalen Dominanzmenge in $G$ ist die *totale Dominanzzahl* $\gamma_t(G)$ von $G$.

**Aufgabe 2:**
Sei $G$ ein Graph mit Minimalgrad $\delta(G) \geq 1$, Ordnung $n(G)$ und totaler Dominanzzahl $\gamma_t(G)$. Beweisen Sie

$$\gamma_t(G) \leq \frac{1 + \log(\delta(G))}{\delta(G)} n(G).$$

**Aufgabe 3:**

(a) Sei $G$ ein Graph mit Ordnung $n(G)$, Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ und fraktionaler chromatischer Zahl $\chi^f(G)$. Beweisen Sie $\chi^f(G) \geq n(G)/\alpha(G)$.

(b) Bestimmen Sie $\chi^f(C_{2k+1})$ für alle $k \geq 1$.

**Definition:** Sei $G$ ein Graph. Eine Teilmenge $C$ der Eckenmenge von $G$ ist eine *Clique*, falls je zwei Ecken aus $C$ in $G$ adjazent sind. Die größte Kardinalität einer Clique in $G$ ist die *Cliquenzahl* $\omega(G)$ von $G$.

**Aufgabe 4:**
Sei $G$ ein Graph mit Maximalgrad $\Delta(G)$, Ordnung $n(G)$, Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ und Cliquenzahl $\omega(G)$. Weiter sei $\mathcal{I}^*$ die Menge aller unabhängigen Mengen von $G$ mit maximaler Kardinalität.

(a) Sei $I \in \mathcal{I}^*$ zufällig (gleichverteilt). Beweisen Sie für alle $v \in V(G)$

$$(\omega(G) + 1)P(v \in I) + E(|I \cap N(v)|) \geq 2.$$

(b) Beweisen Sie

$$\alpha(G) \geq \frac{2n(G)}{\Delta(G) + \omega(G) + 1}.$$

Abgabe zu Beginn der Übung am 30.10.2012.