

Mathematik für Biologen

Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, 18.01.2012 vor den Übungen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Um im Chemiepraktikum ein Experiment zu optimieren, hat jeder von 11 Studenten eine Messung mit einer unterschiedlichen Verdünnungsstufe einer Lösung durchgeführt. Die Stoffkonzentrationen hatten die Werte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{1024}$ mol/l. Am Ende blieben bei jedem der Studenten 5ml der Lösung mit der individuellen Konzentration übrig. Um Reagenzien zu sparen, haben die Studenten diese Reste nun in eine gemeinsame Flasche gefüllt. Wie hoch ist die Konzentration der Lösung in der Flasche?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Reihen:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k}, & \text{(b)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k}, & \text{(c)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^k}, \\ \text{(d)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4^k}}, & \text{(e)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^{2k+1}}, & \text{(f)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+4^k}{5^k}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie das sogenannte Majorantenkriterium für die Konvergenz von Reihen: Ist $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq K$, wobei $K \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl ist, dann folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie die Konvergenz bzw. Divergenz folgender Reihen:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, & \text{(b)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(-3)^k}, & \text{(c)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}, \\ \text{(d)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{(3+k)^3}, & \text{(e)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(5+k)^k}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Deshalb heißt diese Reihe auch Exponentialreihe.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Benutzen Sie die geometrische Reihe, um zu zeigen, dass

$$\text{(a)} \quad 0.\bar{5} = \frac{5}{9}, \quad \text{(b)} \quad 0.3\bar{2} = \frac{29}{90}.$$