Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Dr. Christian Löwenstein

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
WS 2013/14

Matroide und submodulare Funktionen

Übungsblatt 5

Sei E eine Menge. Eine *Mengenfunktion auf E* ist eine Funktion $f : 2^E \to \mathbb{R}$. Gilt

$$f(X \cap Y) + f(X \cup Y) \quad \leq \quad f(X) + f(Y) \tag{1}$$

für alle Teilmengen X und Y von E, so ist f *submodular*. Ist $-f$ submodular, so ist f *supermodular*. Ist f sowohl submodular als auch supermodular, so ist f *modular*. Gilt $f(X) \leq f(Y)$ für alle Teilmengen X und Y von E mit $X \subseteq Y$, so nennt man f *nichtfallend* (*monoton*). Gilt $f(X) = f(E \setminus X)$ für alle Teilmengen X von E so nennt man f *symmetrisch*.

Aufgabe 1. Sei E eine Menge und $f : 2^E \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Zeigen Sie, dass f genau dann modular ist, wenn

$$f(X) = f(\emptyset) + \sum_{x \in X} f(\{x\})$$

für alle $X \subseteq E$ gilt.

Aufgabe 2. Sei G ein bipartiter Graph mit Bipartition $V(G) = A \cup B$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad 2^A \to \mathbb{R} : X \mapsto |N_G(X)| \text{ und} \\ g \quad &: \quad 2^A \to \mathbb{R} : X \mapsto |X| + \min\{f(Y) - Y : Y \subseteq X\} \end{aligned}$$

submodular sind und dass $g(X)$ gleich der maximalen Anzahl von Ecken aus X ist, die durch ein Matching in G überdeckt werden kann.

Aufgabe 3. Sei E eine Menge.
Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : 2^E \to \mathbb{R}$ genau dann submodular ist, wenn

$$f(X \cup \{x\}) - f(X) \quad \geq \quad f(Y \cup \{x\}) - f(Y)$$

für alle $X \subseteq Y \subseteq E \setminus \{x\}$ gilt.

Aufgabe 4. Sei G ein Graph und bezeichne $c(G)$ die Anzahl der Komponenten von G. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Die Funktion $c : 2^{E(G)} \to \mathbb{R} : X \mapsto c((V(G), X))$ ist supermodular.

(ii) Ist I eine unabhängige Menge von Ecken, so ist die Funktion

$$d_I : 2^I \to \mathbb{R} : X \mapsto c(G[V(G) \setminus X])$$

supermodular.

(iii) Die Funktion $d : 2^{V(G)} \to \mathbb{R} : X \mapsto c(G[V(G) \setminus X])$ ist im allgemeinen nicht supermodular.

Aufgabe 5. Sei D ein Digraph. Sei $\mathcal{E}$ die Menge der Mengen $X \subseteq V(D)$, für die kein Bogen von D in $V(D) \setminus X$ beginnt und in X endet, d.h. $\delta_D^+(V(D) \setminus X) = \emptyset$ für

$$\delta_D^+(X) = \{(x, y) \in A(D) : x \in X, y \in V(D) \setminus X\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für $X, Y \in \mathcal{E}$ gilt $X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{E}$.

(ii) Für alle $X, Y \in \mathcal{E}$ gilt

$$|\delta_D^+(X)| + |\delta_D^+(Y)| = |\delta_D^+(X \cap Y)| + |\delta_D^+(X \cup Y)|.$$

Aufgabe 6. Sei G ein Wald und für jede Menge $X \subseteq E(G)$ sei $f(X)$ die Summe der Durchmesser der Komponenten von $(V(G), X)$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für je vier Ecken s, t, u und v von G gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_G(s, u) + \mathrm{dist}_G(t, v) &\geq \mathrm{dist}_G(s, t) + \mathrm{dist}_G(u, v) \text{ oder} \\ \mathrm{dist}_G(t, u) + \mathrm{dist}_G(s, v) &\geq \mathrm{dist}_G(s, t) + \mathrm{dist}_G(u, v). \end{aligned}$$

(ii) Sind $X, Y \subseteq E(G)$ so, dass $(V(G), X)$ und $(V(G), Y)$ jeweils höchstens eine nicht triviale Komponente hat, so gilt $f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$.

(**Bemerkung:** f ist tatsächlich submodular.)

Aufgabe 7. Zeigen Sie die folgende Aussage.

Ist $f : 2^E \to \mathbb{R}$ eine submodulare Funktion, dann ist

$$f_{\text{mon}} : 2^E \to \mathbb{R} : X \mapsto \min\{f(Y) : Y \subseteq X\}$$

eine submodulare Funktion.

Aufgabe 8. Sind $f : 2^E \to \mathbb{R}$ und $g : 2^E \to \mathbb{R}$ submodulare Funktionen und ist $f - g$ nicht-fallend, dann ist $\min\{f, g\}$ submodular.

Aufgabe 9. Ist $f : 2^E \to \mathbb{R}$ submodular und $g : 2^E \to \mathbb{R}$ modular, dann ist die Funktion

$$h : 2^E \to \mathbb{R} : X \mapsto \min\{f(Y) + g(X \setminus Y) : Y \subseteq X\}$$

submodular.

Aufgabe 10. Sei $f : 2^E \to \mathbb{R}$ eine submodulare Mengenfunktion. Sei $x \in EP_f$ und seien $X, Y \subseteq S$ mit $x(X) = f(X)$ und $x(Y) = f(Y)$.

Zeigen Sie $x(X \cap Y) = f(X \cap Y)$ und $x(X \cup Y) = f(X \cup Y)$.

Aufgabe 11. Sei $f : 2^E \to \mathbb{R}$ eine submodulare Mengenfunktion mit $f(\emptyset) = 0$.

Zeigen Sie

$$f(X) = \max\{x(X) : x \in EP_f\}$$

für jede Menge $X \subseteq E$.

Aufgabe 12. Sei G ein bipartiter Graph mit Bipartition $V(G) = A \cup B$.

Zeigen Sie, dass G genau dann einen Wald F als Teilgraphen besitzt, in dem alle Ecken aus A Grad 2 haben, wenn $|N_G(U)| \leq |U| + 1$ für alle nicht leeren $U \subseteq A$ gilt.

Aufgabe 13. Zeigen Sie, dass der konvexe Abschluss einer Mengenfunktionen konvex ist.

Aufgabe 14. Begründen Sie die Wohldefiniertheit der Lovász Erweiterung. Warum existieren die X_i und λ_i aus der Definition und warum legen diese den Wert der Lovász Erweiterung eindeutig fest?

Aufgabe 15. Zeigen Sie für verschiedene Teilmengen A und B einer Menge E mit $A \not\subseteq B$ und $B \not\subseteq A$ die Ungleichung $|A \cup B|^2 + |A \cap B|^2 > |A|^2 + |B|^2$.

Aufgabe 16. Sei $f : 2^E \to \mathbb{R}$ eine submodulare Funktion mit $f(\emptyset) = 0$. Seien $E_1, \ldots, E_t$ nicht notwendigerweise verschiedene Teilmengen von E, so dass jedes Element von E in genau k der Mengen E_i liegt, d.h. $\forall e \in E : |\{i \in [t] : e \in E_i\}| = k$.

Zeigen Sie

$$\sum_{i=1}^{t} f(E_i) \geq k f(E).$$

Aufgabe 17. Zeigen Sie, dass die Lovász Erweiterung einer Mengenfunktion f genau dann konvex ist, wenn f submodular ist.

Aufgabe 18. Sei $f : 2^E \to \mathbb{R}$ submodular. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für jede Menge $X \subseteq E$ gilt

$$\begin{aligned} f(X) &\leq f(\emptyset) + \sum_{e \in E} \max\{0, f(\{e\}) - f(\emptyset)\} \text{ und} \\ f(X) &\geq f(U) - \sum_{e \in E} \max\{0, f(\{e\}) - f(\emptyset)\}. \end{aligned}$$

(ii) Die Funktion $g : 2^E \to \mathbb{R}$ mit

$$g(X) = f(X) + \sum_{e \in X} (f(E \setminus \{e\}) - f(E))$$

ist nicht-fallend und submodular.

Aufgabe 19. Sei $f : 2^E \to \mathbb{R}$ eine submodulare Funktion mit $f(\emptyset) = 0$. Für eine lineare Ordnung $\prec$ auf E und $x \in E$ sei $x_\prec = \{y \in E : y \prec x\}$. Sei $b^\prec \in \mathbb{R}^E$ definiert durch

$$b^\prec(x) = f(x_\prec \cup \{x\}) - f(x_\prec).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Ist $X \subseteq E$ so, dass

$$\forall y \in X : \forall x \prec y : y \in X$$

gilt, so gilt $b^\prec(X) = f(X)$.

(ii) $b^\prec \in B_f$.

(iii) Für $s, u \in E$ entstehe die lineare Ordnung $\prec^{s,u}$, indem für alle v mit $s \preceq v \prec u$ die Relation $v \prec u$ durch die Relation $u \prec v$ ersetzt wird. Es gilt

$$b^{\prec^{s,u}}(v) \begin{cases} \leq b^\prec(v), & s \preceq v \prec u, \\ \geq b^\prec(v), & v = u, \\ = b^\prec(v), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 20. Sei $f : 2^E \to \mathbb{R}$ eine submodulare Funktion. Für $X \subseteq E$ und $p \in [0,1]$ bezeichne $X(p)$ eine zufällige Teilmenge von X, die jedes Element von X unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p enthält.

Zeigen Sie $\mathbf{E}[f(X(p))] \geq (1-p)f(\emptyset) + pf(X)$.

Aufgabe 21. Sei $f : 2^E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine submodulare Funktion. Sei $X \subseteq E$ so dass,

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad &: \quad f(X \setminus \{x\}) \leq f(X) \text{ und} \\ \forall y \in E \setminus X \quad &: \quad f(X \cup \{y\}) \leq f(X). \end{aligned}$$

Zeigen Sie

$$f(Y) \leq f(X)$$

für $Y \subseteq E$ mit $Y \subseteq X$ oder $X \subseteq Y$.

Aufgabe 22. Begründen Sie warum der Satz von Feige et al. 2011 aus der Vorlesung bestmöglich ist.