Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Dr. Christian Löwenstein

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Wintersemester 2013/14

# Matroide und submodulare Funktionen

## Übungsblatt 1

Besprechung: 05. November 2013

**Aufgabe 1.** Sei $(E,\mathcal{U})$ ein Unabhängigkeitssystem. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(M3) Sind $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ mit $|U_1| < |U_2|$, dann gibt es ein $e \in U_2 - U_1$ mit $U_1 + e \in \mathcal{U}$.

(M3′) Sind $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ mit $|U_2| = |U_1| + 1$, dann gibt es ein $e \in U_2 - U_1$ mit $U_1 + e \in \mathcal{U}$.

(M3″) Ist $X \subseteq E$ und sind $U_1, U_2$ inklusionsmaximale Elemente von $\{U \in \mathcal{U} \mid U \subseteq X\}$, dann gilt $|U_1| = |U_2|$.

(M3‴) Sind $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ mit $|U_2 - U_1| = 2$ und $|U_1 - U_2| = 1$, dann gibt es ein $e \in U_2 - U_1$ mit $U_1 + e \in \mathcal{U}$.

**Aufgabe 2.** Sei $G$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $V(G) = A \dot\cup B$ und $(A,\mathcal{U})$ ein Matroid. Beweisen Sie, dass das folgende Mengensystem, ein Matroid ist:

$$(B, \{Y \subseteq B \mid Y = \emptyset \text{ oder } \exists X \in \mathcal{U} : G[X \cup Y] \text{ hat ein perfektes Matching}\}).$$

**Aufgabe 3.** (a) Zeichnen Sie für jedes Matroid $M$, dessen Grundmenge aus höchstens drei Elementen besteht, einen Multigraphen $G$, so dass $M$ graphisches Matroid von $G$ ist.

(b) Sei $E = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{U} = \{U \subseteq E \mid |U| \leq 2\}$. Zeigen Sie, dass $(E,\mathcal{U})$ kein graphisches Matroid ist.

**Aufgabe 4.** [Alternativer Beweis von Satz 1.12]
Sei $G$ ein Multigraph und sei $\mathcal{C}$ die Menge der Kantenmengen der Kreise von $G$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ die Kreismenge eines Matroiden ist, indem Sie für das Mengensystem $(E(G), \mathcal{C})$ die Eigenschaften (C1)-(C3) zeigen.