Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Dr. Christian Löwenstein

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Wintersemester 2013/14

Matroide und submodulare Funktionen

Übungsblatt 2

Besprechung: 19. November 2013

Aufgabe 1. Sei M ein Matroid, B eine Basis von M, $f \in E(M)$, $e \in E(M) - B$ und $C(e, B)$ der eindeutige Kreis, der in $B + e$ enthalten ist. Zeigen Sie, dass $(B + e) - f$ genau dann eine Basis ist, wenn $f \in C(e, B)$.

Aufgabe 2. Sei M ein Matroid und $e \in E(M)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) e ist in jeder Basis von M enthalten.

(b) e ist in keinem Kreis von M enthalten.

(c) Aus $X \subseteq E(M)$ und $e \in \sigma(X)$ folgt $e \in X$.

(d) $r(E(M) - e) = r(E(M)) - 1$.

(e) $\sigma(E(M) - e) = E(M) - e$.

(f) Aus $U \in \mathcal{U}(M)$ folgt $U + e \in \mathcal{U}(M)$.

Aufgabe 3. (nicht ganz leicht)
Sei E eine endliche Menge und $\sigma : 2^E \to 2^E$ eine Funktion, die (S1)-(S4) genügt, und sei

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq E \mid e \notin \sigma(U - e) \text{ für alle } e \in U\}.$$

(a) Zeigen Sie: Für $X \in \mathcal{U}$ und $Y \subseteq E$ mit $|X| > |Y|$ folgt $X \nsubseteq \sigma(Y)$. (Tipp: Induktion nach $|Y - X|$.)

(b) Zeigen Sie, dass $(E, \mathcal{U})$ ein Matroid ist. (Tipp: Aufgabenteil (a) hilft, um (M3) zu zeigen.)

(c) Sei σ' der Abschlussoperator von $(E, \mathcal{U})$. Zeigen Sie $\sigma' = \sigma$. (Tipp: Zeigen Sie, dass $z \in \sigma(X)$ für alle $z \in \sigma'(X) - X$ und dass $z \notin \sigma(X)$ für alle $z \notin \sigma'(X)$.)

Aufgabe 4. Sei $(E, \mathcal{U})$ ein Matroid und $c : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass der Best-In-Greedy-Algorithmus jede Bottleneck-Funktion $c(B) = \min\{c(e) \mid e \in B\}$ über die Menge der Basen maximiert.