Übungen zu Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Dieter Kalin
Dr. Dirk Meierling

WS 2014/2015

Übungsblatt 9 – Probeklausur

Abgabetermin: Mittwoch, 7. Januar 2015, vor den Übungen um 11:00 Uhr
Bearbeitungszeit: 75 Minuten

Aufgabe 1 (Mengen). In einer Umfrage wurden 26 Schüler einer Klasse befragt, welche der Sportarten Fußball, Handball und Tennis sie betreiben. Insgesamt 17 Schüler gaben an, mindestens eine der Sportarten Fußball und Handball zu betreiben; von ihnen spielen 13 Fußball und 9 Handball. Während 4 Schüler keine der drei Sportarten betreiben, gaben 2 Schüler an, alle drei Sportarten zu betreiben. Von den Tennisspielern spielen 4 Handball und 3 Fußball. Wie viele Schüler … (5P)

(i) … spielen sowohl Handball als auch Fußball?

(ii) … spielen sowohl Handball als auch Fußball, aber kein Tennis?

(iii) … spielen Tennis?

(iv) … spielen Tennis und betreiben genau eine weitere Sportart?

(Hinweis: Zeichne ein Venn-Diagramm.)

Aufgabe 2 (Summen und Produkte). Berechne die folgende Summe und das folgende Produkt. (4P)

(i) $\sum\limits_{k=1}^{100} \frac{3}{2^{k+1}}$;

(ii) $\prod\limits_{k=1}^{100} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$.

(Hinweis zu (ii): Bringe jeden Faktor auf einen Nenner und kürze mit anderen Faktoren.)

Aufgabe 3 (Ungleichungen). Bestimme alle reellen Zahlen x, die der Ungleichung (5P)

$$\frac{|x-3|}{x+1} \geq 1$$

genügen.

Aufgabe 4 (Induktion). Zeige mit Hilfe vollständiger Induktion, dass (6P)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt.

Aufgabe 5 (Folgen und Konvergenz I). Untersuche die folgenden Folgen $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz oder Divergenz. Berechne im Falle der Konvergenz den Grenzwert. (6P)

(i) $s_n = \frac{2-n^2}{2n^2-4n+3}$;

(ii) $s_n = \frac{4n^2-2n^n}{n!+7n+n^{2n}}$;

(iii) $s_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}$.

Aufgabe 6 (Folgen und Konvergenz II). Zeige, dass die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert durch $s_1 = \frac{1}{4}$ und $s_{n+1} = \frac{1}{4} + s_n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ nach oben durch $\frac{1}{2}$ beschränkt und monoton wachsend ist. Berechne ihren Grenzwert. (5P)

Aufgabe 7 (Logarithmus und Exponentialfunktion I). Die Temperatur einer Tasse Kaffee sei durch T_0 gegeben. Der Kaffee kühle pro Minute um 6% der Differenz zwischen Kaffeetemperatur und Raumtemperatur R_0 ab. (Dabei setzen wir eine konstante Raumtemperatur von $R_0 \leq T_0$ voraus.) (5P)

(i) Gib eine Formel an, mit der sich die Temperatur $T(t)$ des Kaffees nach t Minuten berechnen lässt.

(ii) Sei $T_0 = 80°C$ und $R_0 = 20°C$. Nach wie vielen Minuten hat der Kaffee eine Trinktemperatur von $50°C$? Berechne die Lösung nicht als Dezimalzahl, sondern drücke sie mit Hilfe des natürlichen Logarithmus ln in der Form $\frac{\ln(x)}{\ln(y)}$ aus.

Aufgabe 8 (Logarithmus und Exponentialfunktion II). Bestimme alle reellen Zahlen x und y, die den folgenden Gleichungen genügen. (4P)

(i) ${}^{4}\log(x^2 + 15) = 3$;

(ii) ${}^{2}\log(\frac{1}{\sqrt{8}}) = y$.

Bonusfrage zu Aufgabe 7. Die Raumtemperatur sei $R_0 > 0°C$. Enthält die Tasse $200ml$ Kaffee der Temperatur $T\,°C$, so hat der Kaffee nach Zugabe von $50ml$ eiskalter Milch (also Milch der Temperatur $0°C$) eine Temperatur von $\frac{8}{10}T\,°C$; die Zugabe der Milch kühlt den Kaffee also sofort um 20% ab. Dirk möchte seinen Kaffee in 6 Minuten möglichst heiß trinken. Soll er die Milch sofort eingießen oder erst in 6 Minuten? Begründe Deine Antwort. (+5P)