11 Netzwerkflüsse

Definition 11.1. Ein *Netzwerk* ist ein 4-Tupel $N = (D, u, s, t)$ mit folgenden Einträgen.

- D ist ein Digraph.
- $u : A(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Funktion.
- s und t sind zwei verschiedene Knotenvon D.

Man nennt s*Quelle* und t *Senke* von N.

Ein *s-t-Fluss in N* ist eine Abbildung $f : A(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

(a) $0 \leq f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in A(D)$ und

(b)
$$ex_f(v) := \sum_{x:(x,v)\in A(D)} f((x,v)) - \sum_{y:(v,y)\in A(D)} f((v,y)) = 0$$
für alle $v \in V(D) \setminus \{s,t\}$.

Der *Wert des s-t-Flusses* f ist $-ex_f(s)$.

Für $U \subseteq V(D)$ mit $s \in U$ und $t \notin U$ nennt man die gerichtete Kantenmenge

$$C = \{(x,y) \in A(D) \mid x \in U, y \notin U\}$$

einen *s-t-Schnitt in N* und $\sum_{(x,y)\in C} u((x,y))$ die *Kapazität dieses s-t-Schnittes.*

Beispiel (nicht gemacht). Sei D mit

$$\begin{aligned} V(D) &= \{s,1,2,3,4,t\} \\ A(D) &= \{(s,1),(s,2),(1,2),(2,1),(1,3),(2,4),(3,2),(4,3),(3,t),(4,t)\} \end{aligned}$$

und

	$(s,1)$	$(s,2)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(4,3)$	$(3,t)$	$(4,t)$	$-ex_f(s)$
u	16	7	10	4	12	14	9	7	20	4	
f_1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
f_2	12	0	0	0	12	0	0	0	12	0	12
f_3	12	4	0	0	12	4	0	0	12	4	16
f_4	16	7	4	0	12	11	0	7	19	4	23

Der s-t-Schnitt $\{(1,3),(4,3),(4,t)\}$ hat Kapazität $12+7+4=23$.

Lemma 11.2. *Sei f ein s-t-Fluss im Netzwerk $N = (D,u,s,t)$. Für $U \subseteq V$ mit $s \in U$ und $t \notin U$ gilt*

$$-ex_f(s) = \sum_{(x,y)\in A(D):x\in U, y\notin U} f((x,y)) - \sum_{(y,x)\in A(D):x\in U, y\notin U} f((y,x)),$$

d.h. der Wert eines s-t-Flusses in N ist höchstens gleich der Kapazität des s-t-Schnittes in N.

□

Bemerkung 11.3. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir für den Rest des Kapitels an, dass die Digraphen D keine gerichteten Kreise der Länge 2 besitzen. Dies können wir immer durch Unterteilung von gerichteten Kanten gewährleisten.

Definition 11.4. Sei f ein s-t-Fluss im Netzwerk $N = (D, u, s, t)$. Zu $e = (x, y) \in A(D)$ sei $e^{-1} = (y, x)$ und

$$D^{\pm 1} = (V(D), A(D) \cup \{e^{-1} \mid e \in A(D)\}).$$

Für $e \in A(D^{\pm 1}) \setminus A(D)$ setze $f(e) = u(e) = 0$.

Für $e \in A(D^{\pm 1})$ sei $u_f(e) = u(e) - f(e) + f(e^{-1})$ die *Residualkapazität von e*. Der *Residualdigraph* für f und N ist

$$D_f = \left(V(D), \left\{e \in A\left(D^{\pm 1}\right) \mid u_f(e) > 0\right\}\right).$$

Ein *f-augmentierender Weg* ist ein gerichteter Weg in D_f von s nach t.

Lemma 11.5. *Sei f ein s-t-Fluss im Netzwerk $N = (D, u, s, t)$. Sei P ein f-augmentierender Weg und $\epsilon \leq \min\{u_f(e) \mid e \in A(P)\}$.*

Es existiert eine eindeutige Abbildung $f' : A(D^{\pm 1}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften.

- *$f' |_{A(D)}$ ist ein s-t-Fluss in N.*
- *$f'(e) = 0$ für $e \in A(D^{\pm 1}) \setminus A(D)$.*
- $$\begin{aligned} \forall e \in A\left(D^{\pm 1}\right) \setminus A\left(P^{\pm 1}\right) &: \quad f'(e) - f'(e^{-1}) = f(e) - f(e^{-1}) \text{ und} \\ \forall e \in A(P) &: \quad f'(e) - f'(e^{-1}) = f(e) - f(e^{-1}) + \epsilon. \end{aligned}$$

Man sagt, dass $f' |_{A(D)}$ entsteht, indem man f entlang von P um ϵ augmentiert. Der Wert von $f' |_{A(D)}$ ist um genau ϵ größer als der Wert von f.

□

Algorithmus 11.6. FORD-FULKERSON ALGORITHMUS

Input: *Ein Netzwerk $N = (D, u, s, t)$.*
Output: *Ein s-t-Fluss f im Netzwerk N maximalen Wertes.*

```
begin
    for e ∈ A(D) do f(e) ← 0;
    while ∃ f-augmentierender Weg P in D_f do
        Augmentiere f entlang P um min{u_f(e) | e ∈ E(P)};
    end
    return f;
end
```

Satz 11.7. *Ein s-t-Fluss f in einem Netzwerk $N = (D, u, s, t)$ hat genau dann maximalen Wert, wenn es keinen f-augmentierenden Weg gibt.*

□

Satz 11.8 (Ford und Fulkerson 1956)**.** *In einem Netzwerk ist der maximale Wert eines s-t-Flusses gleich der minimalen Kapazität eines s-t-Schnittes.*

Beweis: Folgt aus den obigem Beweis. □

Bemerkung 11.9. Ein s-t-Fluss f maximalen Wertes in einem Netzwerk $N = (D, u, s, t)$ entspricht einer optimalen Lösung des folgenden LPs.

$$\begin{array}{llcll} \max & \sum\limits_{v \in N_D^+(s)} f((s,v)) - \sum\limits_{v \in N_D^-(s)} f((v,s)) & & & \\ s.th. & \sum\limits_{v \in N_D^+(u)} f((u,v)) - \sum\limits_{v \in N_D^-(u)} f((u,s)) & = & 0 & \forall u \in V(D) \setminus \{s,t\} \\ & f(e) & \leq & u(e) & \forall e \in A(D) \\ & f(e) & \geq & 0 & \forall e \in A(D). \end{array}$$

Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, so garantieren die uns bekannten Algorithmen nicht die Existenz ganzzahliger optimaler Lösungen dieses LPs.

Satz 11.10 (Dantzig und Fulkerson 1956)**.** *Sind alle Kapazitäten in einem Netzwerk $N = (D, u, s, t)$ ganzzahlig, so existiert ein ganzzahliger s-t-Fluss mit maximalem Wert.*

□

Beispiel 11.11. $D = (\{s, 1, 2, t\}, \{(s, 1), (s, 2), (1, 2), (1, t), (2, t)\})$, $u(s, 1) = u(s, 2) = u(1, t) = u(2, t) = M \in \mathbb{N}$ und $u(1, 2) = 1$.

Wählt der Algorithmus 11.6 abwechselnd die jeweils f-augmentierenden Wege $P : s12t$, $Q : s21t$, P, Q, P, Q, ..., so benötigt er $2M$ Iterationen zur Berechnung eines optimalen Flusses. Da die Kodierungslänge des Netzwerkes $O(\log M)$ beträgt, wäre die Laufzeit exponentiell.

Lemma 11.12. *Sei D ein Digraph und seien s und t zwei verschiedene Knotenvon D. Sei $\alpha(D)$ die Menge der gerichteten Kanten e von D, die zu einem gerichteten Weg der Länge $\operatorname{dist}_D(s, t)$ in D von s nach t gehören. Ist*

$$D' = (V(D), A(D) \cup \{e^{-1} \mid e \in \alpha(D)\},$$

so gilt

$$\operatorname{dist}_{D'}(s, t) = \operatorname{dist}_D(s, t) \text{ und } \alpha(D') = \alpha(D).$$

□

Satz 11.13 (Edmonds und Karp 1972)**.** *Wählt man im* Ford-Fulkerson Algorithmus *jeweils kürzeste f-augmentierende Wege, so terminiert der Algorithmus nach höchstens $O(n(D)m(D))$ vielen Augmentierungen.*

□