2 Systeme linearer Ungleichungen

Viele Aussagen der folgenden Abschnitte gelten sowohl für die reellen Zahlen als auch für die rationalen Zahlen als Körper. Sei daher im Folgenden immer $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Weiter sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$ und $c \in \mathbb{K}^n$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Alle Vektoren werden als Spaltenvektoren aufgefaßt.

Definition 2.1. (i) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *konvex*, wenn $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in M$ für alle $x_1, x_2 \in M$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt.

(ii) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein *Kegel*, wenn $\lambda x \in M$ für alle $x \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt.

(iii) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein *konvexer Kegel*, wenn $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M$ für alle $x_1, x_2 \in M$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt.

Definition 2.2. Für eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die lineare Hülle $\mathrm{lin}(X)$, die affine Hülle $\mathrm{aff}(X)$, die konvexe Hülle $\mathrm{conv}(X)$ und der durch X erzeugte konvexe Kegel $\mathrm{cone}(X)$ wie folgt definiert

$$\begin{aligned}
\mathrm{lin}(X) &= \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \mid t \in \mathbb{N}_0, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ für } i \in [t] \right\} \\
\mathrm{aff}(X) &= \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \mid t \in \mathbb{N}_0, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ für } i \in [t] \text{ mit } \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1 \right\} \\
\mathrm{conv}(X) &= \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \mid t \in \mathbb{N}_0, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ für } i \in [t] \text{ mit } \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1 \right\} \\
\mathrm{cone}(X) &= \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \mid t \in \mathbb{N}_0, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ für } i \in [t] \right\}.
\end{aligned}$$

Satz 2.3 (Fundamentalsatz über lineare Ungleichungen, Farkas 1894, Minkowski 1896, Caratheodory 1911)**.** *Sind $a_1, a_2, ..., a_n, b \in \mathbb{K}^m$ und ist t der Rang der Matrix $[a_1, a_2, ...a_n, b]$, so gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen.*

(i) Es existiert eine Menge $I \subseteq [n]$ für die $\{a_i \mid i \in I\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren ist und es existieren $\lambda_i \in \mathbb{K}_{\geq 0}$ für $i \in I$ mit $b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$.

(ii) Es existiert ein $y \in \mathbb{K}^m$, für welches die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^m \mid y^T x = 0\}$ $t-1$ linear unabhängige Vektoren aus $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ enthält, so dass $y^T b < 0$ und $y^T a_i \geq 0$ für $1 \leq i \leq n$ gilt.

Beweis:

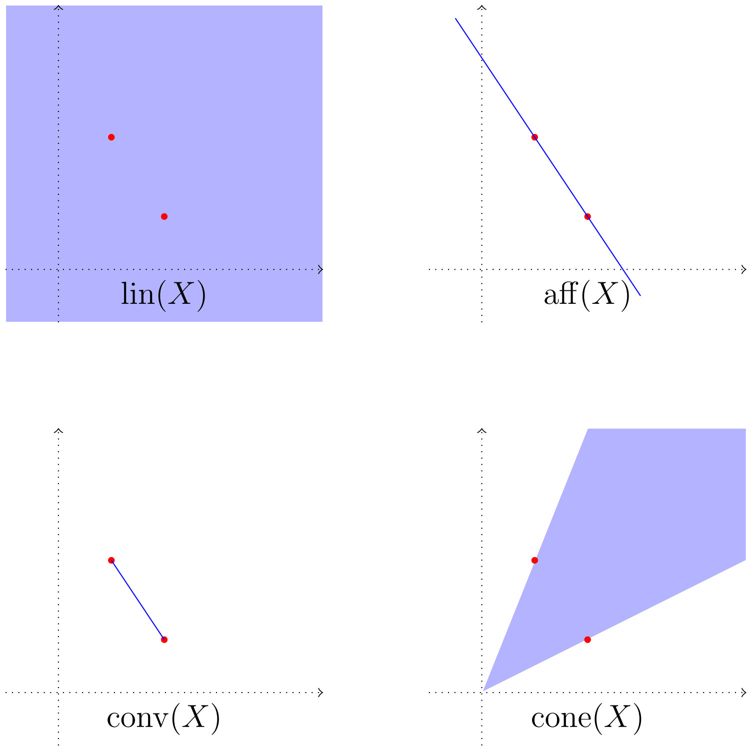

Abbildung 1: $\text{lin}(X)$, $\text{aff}(X)$, $\text{conv}(X)$ und $\text{cone}(X)$ für $X = \{(1, 2.5), (2, 1)\}$.

Input: Vektoren $a_1, a_2, ..., a_n, b \in \mathbb{K}^m$, eine Menge $I \subseteq [n]$, für die $\{a_i \mid i \in I\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren ist und Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{K}$ für $i \in I$ mit $b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$.

Output: Entweder eine Darstellung wie in (i) von Satz 2.3 oder ein y wie in (ii) von Satz 2.3.

begin
  while $\exists i \in I : \lambda_i < 0$ **do**
    Sei h der kleinste Index in I mit $\lambda_h < 0$;
    Sei $y \in \mathbb{K}^m$ so, dass $y^T a_i = 0$ für $i \in I \setminus \{h\}$ und $y^T a_h > 0$ gilt;
    if $\forall i \in [n] : y^T a_i \geq 0$ **then**
      return y;
    else
      Sei s der kleinste Index in $[n]$ mit $y^T a_s < 0$;
      $I \leftarrow (I \setminus \{h\}) \cup \{s\}$;
      Bestimme $\lambda_i \in \mathbb{K}$ für $i \in I$ mit $b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$;
    end
  end
  return $b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$;
end

Algorithm 1: Einfache Variante des Simplex Algorithmus

□

Bemerkung 2.4. Der Beweis von Satz 2.3 liefert bereits ein Verfahren zur Lösung be-

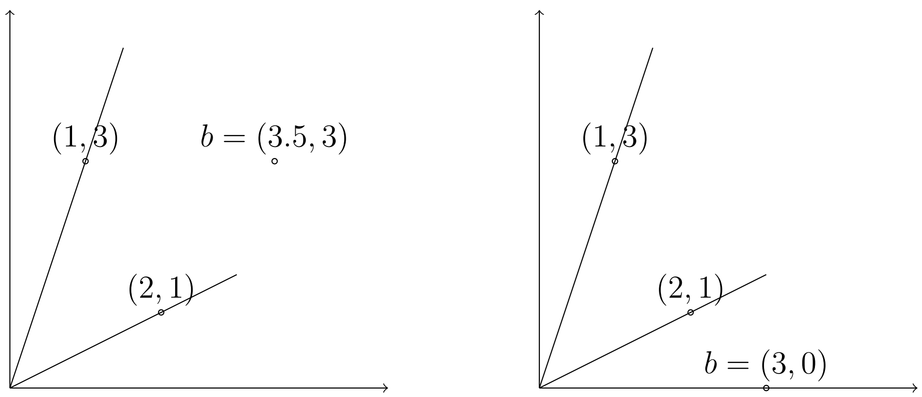

Abbildung 2: $(3.5, 3) = 0.5(1, 3) + 1.5(2, 1)$, $y = (-1, 2)$, $y^\top(1, 3) = 5, y^\top(2, 1) = 0, y^\top(3, 0) = -3$.

liebiger linearer Ungleichungssysteme

$$Ax \leq b, x \in \mathbb{K}^n \tag{1}$$

für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Durch die Substitution $x = x^+ - x^-$ für geeignete $x^+, x^- \in \mathbb{K}^n_{\geq 0}$ und die Einführung sogenannter Schlupfvariabeln $y \in \mathbb{K}^m_{\geq 0}$ kann man (1) in

$$\begin{pmatrix} A & -A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2n+m}_{\geq 0} \tag{2}$$

überführen, d.h. es existiert genau dann ein $x \in \mathbb{K}^n$, welches (1) erfüllt, wenn ein $z \in \mathbb{K}^{2n+m}_{\geq 0}$ existiert, welches (2) erfüllt. Der Algorithms aus dem Beweis von Satz 2.3 löst Ungleichungssysteme der Form (2).

Folgerung 2.5 (Lemma von Farkas, Farkas 1894)**.** *Seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$.*

(i) Es gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen.

- *(a)* $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$.
- *(b)* $\{y \in \mathbb{K}^m \mid y^T A \geq 0, y^T b < 0\} \neq \emptyset$.

(ii) Es gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen.

- *(a)* $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$.
- *(b)* $\{y \in \mathbb{K}^m \mid y^T A \geq 0, y \geq 0, y^T b < 0\} \neq \emptyset$.

(iii) Es gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen.

- *(a)* $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$.
- *(b)* $\{y \in \mathbb{K}^m \mid y^T A = 0, y \geq 0, y^T b < 0\} \neq \emptyset$.

□

Bemerkung 2.6. Ein weiteres Verfahren ist die **Fourier-Motzkin Elimination** (Fourier 1827, Dines 1918-19, Motzkin 1936). Zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{K}^m$ sei (P) folgendes System von Ungleichungen

$$(P) : Ax \leq b.$$

Gilt $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \dots \\ a_m^T \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ so hat (P) folgende Gestalt

$$(P) : \quad a_i^T x \quad \leq \beta_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Multipliziert man die m Ungleichungen von (P) mit passenden Zahlen aus $\mathbb{K}_{\geq 0}$ ergibt sich ein äquivalentes System (P') mit

$$(P') : \quad \begin{aligned} x_1 + (a_i')^T x' &\leq \beta_i', \quad 1 \leq i \leq m' \\ -x_1 + (a_i')^T x' &\leq \beta_i', \quad m'+1 \leq i \leq m'' \\ (a_i')^T x' &\leq \beta_i', \quad m''+1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

wobei die a_i' passende Vektoren aus $\mathbb{K}^{n-1}$ sind, die β_i' passende Zahlen aus $\mathbb{K}$ sind und $x = \binom{x_1}{x'}$ gilt.

Da die ersten m'' Ungleichungen von (P') zu

$$\max_{m'+1 \leq i \leq m''} ((a_i')^T x' - \beta_i') \leq x_1 \leq \min_{1 \leq i \leq m'} (\beta_i' - (a_i')^T x')$$

äquivalent sind, kann man x_1 aus (P') eliminieren, d.h. es existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$, welches (P') lößt, genau dann, wenn ein $x' \in \mathbb{K}^{n-1}$ existiert, welches

$$\begin{aligned} (P'') : \quad (a_j')^T x' - \beta_j' &\leq \beta_i' - (a_i')^T x', 1 \leq i \leq m', m'+1 \leq j \leq m'' \\ (a_i')^T x' &\leq \beta_i', m''+1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

lößt.

(P'') ist wiederum äquivalent zu (P''') mit

$$\begin{aligned} (P''') : \quad (a_j' + a_i')^T x' &\leq \beta_j' + \beta_i', 1 \leq i \leq m', m'+1 \leq j \leq m'' \\ (a_i')^T x' &\leq \beta_i', m''+1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Das System (P''') besteht aus $m'(m''-m') + m - m''$ vielen Ungleichung für $n-1$ viele Variablen.

Die Eliminierung von x_1 entspricht der Projektion von

$$\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax \leq b\}$$

entlang der x_1-Achse, d.h. die Lösungsmenge von (P''') hat folgende Gestalt

$$\left\{ x' \in \mathbb{K}^{n-1} \mid \exists x_1 \in \mathbb{K} : A \begin{pmatrix} x_1 \\ x' \end{pmatrix} \leq b \right\}.$$

Folgerung 2.7. *Ist* $P = \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{K}^{n_1+n_2} \mid A\binom{x_1}{x_2} \leq b \right\}$ *für* $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *und* $b \in \mathbb{K}^m$ *und ist* P' *die Projektion von* P *auf die ersten* n_1 *Koordinaten, d.h.*

$$P' = \left\{ x_1 \in \mathbb{K}^{n_1} \mid \exists x_2 \in \mathbb{K}^{n_2} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in P \right\},$$

dann existieren $A' \in \mathbb{K}^{m' \times n_1}$ *und* $b' \in \mathbb{K}^{m'}$ *mit* $P' = \{x_1 \in \mathbb{K}^{n_1} \mid A'x_1 \leq b'\}$. *Weiter gilt: Ist* $b = 0$, *so gilt* $b' = 0$.

□

Bemerkung 2.8. Die Fourier-Motzkin Elimination ist kein polynomielles Verfahren.