3 Hauptsätze der linearen Programmierung

Zu einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und Vektoren $b \in \mathbb{K}^m$ und $c \in \mathbb{K}^n$ sei

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

und (P) das Optimierungsproblem

$$(P): \max\{c^T x \mid x \in P\} = \max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}.$$

Zu (P) betrachten wir das sogenannte "duale" Problem (D)

$$(D): \min\{b^T y \mid y \in D\} = \min\{b^T y \mid y \in \mathbb{R}^m, y^T A = c^T, y \geq 0\}.$$

mit

$$D = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y^T A = c^T, y \geq 0\}.$$

Elemente von P bzw. D nennt man zulässige Lösungen für (P) bzw. (D). Elemente $x' \in P$ bzw. $y' \in D$ mit

$$c^T x' = \max\{c^T x \mid x \in P\}$$

bzw.

$$b^T y' = \min\{b^T y \mid y \in D\}$$

nennt man (optimale) Lösungen für (P) bzw. (D). Für beliebige Elemente $x \in P$ und $y \in D$ gilt immer die sogenannte *schwache Dualität*

$$c^T x = y^T Ax \leq y^T b.$$

Satz 3.1 (Dualitätssatz der Linearen Optimierung, von Neumann 1947, Gale, Kuhn und Tucker 1951))**.** *Sind P und D wie oben und beide Mengen nicht leer, so gilt*

$$\max\{c^T x \mid x \in P\} = \min\{b^T y \mid y \in D\}.$$

□

Satz 3.2. *Sind (P) und (D) wie oben so gilt genau eine der folgenden Möglichkeiten.*

(i) *(P) und (D) besitzen beide Lösungen (mit gleichem Wert nach Satz 3.1).*

(ii) $P = D = \emptyset$.

(iii) $P = \emptyset$ *und* $\inf\{b^T y \mid y \in D\} = -\infty$.

(iv) $D = \emptyset$ *und* $\sup\{c^T x \mid x \in P\} = \infty$.

□

Folgerung 3.3 (Charaktersierungssatz der Linearen Optimierung)**.** *Sei (P) wie oben. Ein Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax \leq b$ ist genau dann eine optimale Lösung von (P), wenn ein $y \in \mathbb{K}^m$ existiert mit $c^T = y^T A$, $y \geq 0$ und $y^T(Ax - b) = 0$.*

□

Folgerung 3.4 (Satz von komplementären Schlupf)**.** *Seien (P) und (D) wie oben. Besitzt eines der Probleme (P) und (D) eine optimale Lösung so auch das andere und es gilt für $x \in P$ und $y \in D$, dass x und y genau dann optimale Lösungen von (P) und (D) sind, wenn $y^T(b - Ax) = 0$ gilt.*

□

Weitere Paare von dualen linearen Programmen für die obige Sätze analog gelten sind

$$(P_1) : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \text{ und } (D_1) : \min\{b^T y \mid y^T A \geq c^T, y \geq 0\}.$$

oder

$$(P_2) : \min\{c^T x \mid Ax \geq b, x \geq 0\} \text{ und } (D_2) : \max\{b^T y \mid y^T A \leq c^T, y \geq 0\}.$$