4 Polyeder

Die Menge der zulässigen Lösungen für die linearen Programme (P) und (D) aus dem letzten Abschnitt nennt man Polyeder.

Definition 4.1. (i) Ein *Polyeder* ist eine Menge der Form

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Sind $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ so nennt man P einen rationalen Polyeder. Die *Dimension* $\dim(P)$ von P ist die Dimension des kleinsten affinen Teilraumes des $\mathbb{R}^n$, der P enthält. Ist $\dim(P) = n$, so nennt man P *volldimensional*.

(Zur Erinnerung: Ein affiner Teilraum des $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form $x + U$ wobei $x \in \mathbb{R}^n$ gilt und U ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist. Die Dimension des affinen Teilraumes ist die Dimension von U. Affine Teilräume sind die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme.)

(ii) Ein *Polytop* ist die konvexe Hülle endliche vieler Punkte des $\mathbb{R}^n$.

(iii) Ein *polyedrischer Kegel* ist eine Menge der Form

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$$

für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Ist $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ so nennt man C einen *rationalen polyedrischen Kegel*.

(iv) Ein *endlich erzeugter konvexer Kegel* ist ein durch eine endliche Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ erzeugter konvexen Kegel $\mathrm{cone}(X)$.

Bemerkung 4.2. (**Übung**) Ist $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder, so gilt

$$\dim(P) = n - \max\{\mathrm{rang}(B) \mid B \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ mit } \forall x, y \in P : Bx = By\}.$$

Satz 4.3 (Farkas 1898, 1902, Minkowski 1896, Weyl 1935)**.** *Für $C \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(a) Es existiert $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$.

(b) Es existiert $X \in \mathbb{K}^{n\times l}$ mit $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^l_{\geq 0} : x = Xy\}$.

Ein konvexer Kegel ist genau dann polyedrisch, wenn er endlich erzeugt ist.

□

Folgerung 4.4 (Motzkin 1936)**.** *Für $P \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(a) Es existieren $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ mit

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}.$$

(b) Es existieren $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s \in \mathbb{K}^n$ mit

$$P = \mathrm{conv}(\{y_1, \ldots, y_s\}) + \mathrm{cone}(\{x_1, \ldots, x_r\}).$$

Sind A wie in (a) und $x_1, \dots, x_r$ wie in (b), so gilt

$$\text{cone}(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}.$$

□

Definition 4.5. Ist $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein nicht leerer Polyeder und $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ so, dass $\delta = \max\{c^T x \mid x \in P\}$ endlich ist, so nennt man

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = \delta\}$$

eine *Stütz(hyper)ebene* von P und

$$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = \delta\}$$

eine *Seite* von P. (Aus Satz **??** folgt, dass eine Seite niemals leer ist, da "max = sup".)

Ist für $x \in \mathbb{R}^n$ die Menge $\{x\}$ eine Seite von P, so ist x eine *Ecke* von P.

Satz 4.6. *Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ ein Polyeder und $F \subseteq P$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) F ist eine Seite von P.

(b) Es existiert ein $c \in \mathbb{K}^n$, für welches $\delta := \max\{c^T x \mid x \in P\}$ endlich ist und $F = \{x \in P \mid c^T x = \delta\}$ gilt.

(c) Es gilt $F = \{x \in P \mid A'x = b'\} \neq \emptyset$ für ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$.

□

Folgerung 4.7. *Die Menge der optimalen Lösungen eines linearen Programms (P) : $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ ist eine Seite des Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.*

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition. □

Folgerung 4.8. *Es sei P ein Polyeder, F eine Seite von P und $F' \subseteq F$.*

(i) F ist ein Polyeder.

(ii) F' ist genau dann eine Seite von F, wenn F' eine Seite von P ist.

□

Satz 4.9 (Hoffmann und Kruskal 1956)**.** *Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder. Eine nicht leere Menge $F \subseteq P$ ist genau dann eine (inklusions)minimale Seite von P, wenn $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b'\}$ für ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$ gilt.*

□

Folgerung 4.10. *Ist $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder, so haben alle minimalen Seiten von P die Dimension $n - \text{rang}(A)$. Insbesondere sind alle minimalen Seiten von Polytopen Ecken.*

□