5 Simplexverfahren

Wir betrachten nun lineare Programme in der folgenden kanonischen Form.

$$(P)\quad \begin{array}{lrcl} \min & c^T x & & \\ & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und Vektoren $b \in \mathbb{K}^m$ und $c \in \mathbb{K}^n$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\operatorname{rang}(A) = m \leq n$ gilt, da anderenfalls einige der Gleichungen in $Ax = b$ redundant sind und entfernt werden können.

Bemerkung 5.1. Alle linearen Programme lassen sich in kanonischer Form schreiben, denn

$$\exists x \in \mathbb{K}^n : a^T x \leq \beta$$

ist äquivalent zu

$$\exists x_+, x_-, y \in \mathbb{K}^n_{\geq 0} : a^T(x_+ - x_-) + y = \beta.$$

Die Spalten von A bezeichnen wir mit $a^1, a^2, ..., a^n$ und die Zeilen von A bezeichnen wir mit $a_1, a_2, ..., a_m$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & \dots & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}.$$

Sei

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

der Polyeder der zulässigen Lösungen.

Zu einem $x \in P$ sei $Z \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ die Menge der Indizes i mit $x_i > 0$. Man nennt

$$\{a^i \mid i \in Z\}$$

die zu x gehörende Spaltenmenge. Es gilt offenbar

$$\sum_{i \in Z} x_i a^i = b.$$

Folgerung 5.2. *Ist $P \neq \emptyset$, so besitzt P Ecken, d.h. insbesondere, dass alle (inklusionsminimalen Seitenflächen Ecken sind.*

□

Folgerung 5.3. *Ein Element $x \in P$ ist genau dann Ecke von P, wenn die zu x gehörende Spaltenmenge linear unabhängig ist.*

□

Folgerung 5.4. *Alle Ecken von P haben höchstens m positive Koordinaten.*

□

Definition 5.5. Eine Ecke von P heißt *nicht entartet*, falls sie genau m positive Koordinaten besitzt. Anderenfalls heißt sie *entartet*. Zu einer Ecke x von P nennt man jede m-elementige Menge von linear unabhängigen Spalten von A, die die zu x gehörende Spaltenmenge enthält, eine *Basis von x*. Die Menge der entsprechenden Spaltenindizes nennt man *Basisindexmenge der Basis von x*.

Folgerung 5.6. *Die Menge der optimalen Lösungen von (P) ist ein Polyeder P_{opt}. Die Ecken von P_{opt} sind genau die Ecken von P, die in P_{opt} liegen.*

Folgerung 5.7. *Besitzt (P) eine optimale Lösung (ist also nicht unbeschränkt), so existiert eine optimale Lösung, die eine Ecke von P ist.*

□

Bemerkung 5.8. Die obigen Sätze liefern schon ein (endliches) Verfahren zur Lösung von (P), falls (P) beschränkt ist: Man betrachtet alle Untermatrizen A' von A, die aus m linear unabhängigen Spalten von A bestehen. Es gibt höchstens $\binom{n}{m}$ viele solcher Matrizen. Da solch ein A' regulär ist, hat $A'x' = b$ eine eindeutige Lösung x'. Ist $x' \geq 0$ und entsteht x, indem man x' passend durch 0-Einträge ergänzt, so ist x Ecke von P. Da auf diese Weise alle Ecken entstehen und mindestens eine optimale Lösung unter diesen ist, kann man (P) lösen.

5.1 Ecken-Basis-Austausch

5.2 Simplexverfahrens in Tableauschreibweise

Wir betrachten das Starttableau

$$\begin{array}{c|c|c} c_Z^T & c_{NZ}^T & 0 \\ \hline A_Z & A_{NZ} & b. \end{array}$$

Da A_Z invertierbar ist, existiert λ mit $c_Z^T = \lambda^T A_Z$. Es folgt

$$p^T = c_{NZ}^T - c_Z^T A_Z^{-1} A_{NZ} = c_{NZ}^T - \lambda^T A_{NZ}$$

und

$$c_Z^T \bar{x}_Z = \lambda^T A_Z A_Z^{-1} b = \lambda^T b.$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir das folgende Tableau

$$\begin{array}{c|c|c} c_Z^T - \lambda^T A_Z & c_{NZ}^T - \lambda^T A_{NZ} & 0 - \lambda^T b \\ \hline A_Z & A_{NZ} & b. \end{array} = \begin{array}{c|c|c} 0 & p^T & -c_Z^T \bar{x}_Z \\ \hline A_Z & A_{NZ} & b. \end{array}$$

Diese Unformung entspricht einer neuen Darstellung der Zielfunktion

$$\begin{aligned} c^T x &= c^T x - 0 \\ &= c^T x - \lambda^T (Ax - b) \\ &= c_Z^T x_Z + c_{NZ}^T x_{NZ} - (\lambda^T A_{NZ} x_{NZ} + \lambda^T A_{NZ} x_{NZ} - \lambda^T b) \\ &= p_{NZ}^T x_{NZ} + \lambda^T b \\ &= p_{NZ}^T x_{NZ} + c_Z^T \bar{x}_Z, \end{aligned}$$

d.h. in der rechten oberen Ecke des Tableau steht das negative des konstanten Anteils.

Duch weitere elementare Zeilenumformungen erhalten wir das folgende Tableau

$$\begin{array}{l|l|l} 0 & p^T & -c_Z^T\bar{x}_Z \\ \hline A_Z^{-1}A_Z & A_Z^{-1}A_{NZ} & A_Z^{-1}b. \end{array} = \begin{array}{c|c|l} 0^T & p^T & -c_Z^T\bar{x}_Z \\ \hline I & Q & \bar{x}_Z. \end{array}$$

In diesem Tableau kann man nun die Ecken-Basis-Austausch leicht durchführen.

5.3 Bestimmung einer Startecke

Überführt man

$$Ax \leq b, x \geq 0$$

durch Einführung der Schlupfvariabeln y in die (kanonische) Form,

$$[A \mid I]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0,$$

so ist $\binom{\bar{x}}{\bar{y}} = \binom{0}{b}$ eine Ecke des Polyeders

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| [A \mid I]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

Im Allgemeinen betrachten wir zu

$$Ax = b, x \geq 0$$

mit $\operatorname{rang}(A) = m$ und o.B.d.A. (!) $b \geq 0$ folgendes Hilfsproblem

$$(HP) \qquad \begin{array}{lrcl} \min & \sum\limits_{i\in[m]} y_i & & \\ & Ax + y & = & b \\ & x & \geq & 0 \\ & y & \geq & 0. \end{array}$$

Die Ecke $\binom{0}{b}$ von P ist eine geeignete Startecke für (HP). Sei die Ecke $\binom{\bar{x}}{\bar{y}}$ von P eine optimale Lösung von (HP).

- Ist $\bar{y} \neq 0$, so gilt $P = \emptyset$.
- Ist $\bar{y} = 0$, so ist $\bar{x}$ eine Ecke von P (vgl. Folgerung 5.3).

5.4 Indexstrategie von Bland

Indexstrategie von Bland: Wähle beim Simplexalgorithmus den Index $j \in NZ$, der zur Basisindexmenge hinzugefügt werden soll, minimal und wähle auch den Index $l \in Z$, der die Basisindexmenge verlassen soll, minimal.

Satz 5.11. *Bei Anwendung der Indexstrategie von Bland wird beim Simplexalgorithmus keine Basis zweimal betrachtet.*

Beweis: □