7 Ganzzahlige lineare Programme

Bei vielen praktischen Problemen müssen zulässige Lösungen Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllen. Ein **ganzzahliges lineares Programm (ILP)** ist ein Problem der Form

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$$

für $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ und $c \in \mathbb{Z}^n$.

Beispiel 7.1. Zeichne den zulässigen Bereich für

$$\begin{array}{lccc} \max & x_1 + x_2 & & \\ & 3x_1 + x_2 & \leq & 9 \\ & x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

In diesem Fall ist die konvexe Hülle der zulässigen Punkte ist wieder ein Polytop. Eine Ecke dieses Polytops ist optimale Lösung des ILP.

Beispiel 7.2. Wir betrachten folgendes Problem.

$$\begin{array}{lccc} \sup & \sqrt{2}x - y & & \\ & \sqrt{2}x - y & \leq & \frac{1}{2} \\ & x, y & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

Nach dem

Satz von Dirichelet (1842)

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : \exists p, q \in \mathbb{Z} : \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\epsilon}{q} \textit{ und } 1 \leq q \leq \frac{1}{\epsilon}.$$

existieren zu jedem $\epsilon > 0$ ganze Zahlen p und q mit $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{\epsilon}{q}$. O.B.d.A. gilt $p, q \geq 1$. Es folgt $\left|\sqrt{2}q - p\right| \leq \epsilon$. Da $\sqrt{2}$ irrational ist, gilt $\sqrt{2}q - p \neq 0$. Daher existieren $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{1}{2} - \epsilon \leq \sqrt{2}x - y \leq \frac{1}{2}.$$

Es folgt, dass das obige Supremum gleich $\frac{1}{2}$ ist. Da $\sqrt{2}$ irrational ist, wird dieses Supremum nicht angenommen, d.h. anders als bei linearen Programmen existiert für beschränkte und zulässige ILPs nicht immer eine optimale Lösung.

Als weitere Konsequenz ergibt sich, dass die konvexe Hülle der ganzzahligen Punkte des Polyeders

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \frac{1}{2}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

selber kein Polyeder sein kann.

Beispiel 7.3. Traveling Salesman Problem

Gesucht wird ein Rundreise, die alle Städte in $[n]$ besucht. Der Abstand zwischen Stadt i und j beträgt $c(i,j) = c(j,i)$. Wir betrachten die boolesche Variable $x(i,j) \in \{0,1\}$ wobei $x(i,j) = 1$ genau dann gelten soll, wenn die Rundreise die Stadt j direkt nach der Stadt i besucht.

Folgendes ILP

$$\begin{array}{lrcll} \max & \sum_{(i,j)\in[n]^2} c(i,j)x(i,j) & & & \\ & \sum_{i\in[n]} x(i,j) & = & 1 & \forall j \in [n] \\ & \sum_{j\in[n]} x(i,j) & = & 1 & \forall i \in [n] \\ & x(i,j) & \in & \{0,1\} & \forall (i,j) \in [n]^2 \end{array}$$

beschreibt das Problem noch nicht vollständig.

Es fehlt

$$\sum_{i\in S} \sum_{j\in[n]\setminus S} x(i,j) \geq 1 \forall S \in 2^{[n]} \setminus \{\emptyset, [n]\}.$$

Dies liefert eine Beschreibung mit exponentiell vielen Ungleichungen.

Definition 7.4. Die *ganzzahlige Hülle* P_I eines rationalen Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle der ganzzahligen Punkte in P, d.h. $P_I = \operatorname{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$. Gilt $P = P_I$, so heißt P *ganzzahlig.*

Bemerkung 7.5.

- Für jeden rationalen Polyeder P gilt $P_I \subseteq P$.
- Die ganzzahlige Hülle eines Polytopes ist die konvexe Hülle einer endlichen Menge ganzzahliger Punkte und daher ein rationales Polytop (Folgerung **??**).
- Die konvexe Hülle der ganzzahligen Punkte eines Polyeders ist nicht immer ein Polyeder.

Satz 7.6. *Ist $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein rationaler Polyeder mit $P_I \neq \emptyset$ und $c \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ genau dann beschränkt, wenn $\max\{c^T x \mid x \in P_I\}$ ist.*

□

Satz 7.7. *Jeder rationale polyedrische Kegel ist ganzzahlig.*

□

Satz 7.8 (Meyer 1974)**.** *Die ganzzahlige Hülle eines rationalen Polyeders ist ein rationaler Polyeder.*

□

Bemerkung 7.9. Ist $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein rationaler Polyeder und ist die Kodierungslänge jeder Ungleichung von $Ax \leq b$ durch ϕ beschränkt, so existieren $A' \in \mathbb{Q}^{m' \times n}$ und $b' \in \mathbb{Q}^{m'}$ mit $P_I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \leq b'\}$ so, dass die Kodierungslänge jeder Ungleichung von $A'x \leq b'$ durch $15n^6\phi$ beschränkt ist. Die Anzahl m' der Ungleichungen kann dabei exponentiell wachsen.

Definition 7.10. Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $\det(A) \in \{-1, 1\}$ heißt *unimodular*. Eine Matrix heißt *vollständig unimodular*, falls die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A den Wert -1, 0 oder 1 hat.

Bemerkung 7.11. Eine Untermatrix entsteht durch das beliebige Streichen von Zeilen und Spalten. Eine Matrix A' ist genau dann eine quadratische Untermatrix einer Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j\in[n]}$, wenn Zeilenindizes $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ und Spaltenindizes $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ existieren mit

$$A' = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\times\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}.$$

Alle Einträge einer vollständig unimodularen Matrix sind -1, 0 oder 1.

Bemerkung 7.12. Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ so, dass AU aus A durch eine der folgenden drei Operationen

- Multiplizieren der p-ten Spalte mit -1.
- Tausch der Spalten p und q.
- Subtraktion der q-ten Spalte von der p-ten.

entsteht. Wie sieht die Matrix U jeweils aus? Man nennt beliebige Folge dieser Operationen eine *unimodulare Transformation*.

Satz 7.13. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann unimodular, wenn sie aus der Einheitsmatrix durch unimodulare Transformation hervorgeht*

□

Satz 7.14 (Hoffmann 1974, Edmonds und Giles 1977)**.** *Für einen nicht leeren rationalen Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) $P = P_I$.

(2) Jede Seitenfläche von P enthält ganzzahlige Vektoren.

(3) Für jedes $c \in \mathbb{R}^n$, für welches $\max\{c^Tx \mid x \in P\}$ endlich ist, wird das Maximum in einem ganzzahligen Vektor angenommen.

□

Satz 7.15 (Hoffmann und Kruskal 1956)**.** *Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ ist genau dann total unimodular, wenn der Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ für jedes $b \in \mathbb{Z}^m$ ganzzahlig ist, d.h. $P = P_I$ gilt.*

□

Folgerung 7.16 (Hoffmann und Kruskal 1956)**.** *Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ ist genau dann total unimodular, wenn für alle $b \in \mathbb{Z}^m$ und $c \in \mathbb{Z}^n$ beide Optima in der Dualitätsgleichung*

$$\max\{c^Tx \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{b^Ty \mid A^Ty \geq c, y \geq 0\}$$

in ganzzahligen Vektoren angenommen werden sofern sie endlich sind.

□

7.1 Schnittebenenverfahren

Bemerkung 7.17. Wir betrachten folgendes ILP

$$\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Sei x^* eine optimale Lösung des zugehörigen LPs $\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

Ist $x^* \in \mathbb{Z}^n$, so löst x^* auch das ILP exakt.

Die Idee bei Schnittebenenverfahren besteht darin, für den Fall $x^* \notin \mathbb{Z}^n$ systematisch Ungleichungen zu generieren, die alle ganzzahligen Lösungen von $Ax = b, x \geq 0$ erfüllen. Solche Ungleichungen fügt man iterativ zu $Ax = b, x \geq 0$ hinzu und löst die entsprechenden LPs.

Lemma 7.18 (Gomory 1960). *Gilt für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ mit $x_i \in \mathbb{Z}$ für $i \in I$ die Gleichung*

$$\sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{i \in [n] \setminus I} a_i x_i = \beta \tag{1}$$

für $a_1, \ldots, a_n, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \notin \mathbb{Z}$, so folgt

$$\sum_{i \in I : f_i \leq f_0} \frac{f_i}{f_0} x_i + \sum_{i \in I : f_i > f_0} \frac{1 - f_i}{1 - f_0} x_i + \sum_{i \in [n] \setminus I : a_i > 0} \frac{a_i}{f_0} x_i - \sum_{i \in [n] \setminus I : a_i < 0} \frac{a_i}{1 - f_0} x_i \geq 1 \tag{2}$$

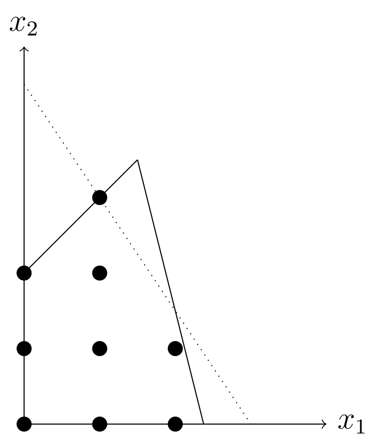
wobei $f_0 = \beta - \lfloor \beta \rfloor$ und $f_i = a_i - \lfloor a_i \rfloor$ für $i \in [n]$ gilt.

Man nennt (2) den zu (1) gehörenden Gomory Schnitt (Gomory mixed integer cut).

□

Beispiel 7.19. Wir betrachten folgendes ILP

$$\begin{array}{lll} \max & x_1 + x_2 & \\ & -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 & \leq & 19 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}. \end{array}$$



Durch Einführung von Schlufvariabeln erhalten wir

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1 + x_2 & & \\ & -x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 + x_4 & = & 19 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \in & \mathbb{Z}. \end{array}$$

Eine optimale Lösung des zugehörigen LPs ist $x^* = (1.5, 3.5, 0, 0)$. Das Endtableau beim Simplexalgorithmus entspricht folgendem äquivalenten LP

$$\begin{array}{lrcl} \max & 5 - 0.6x_3 - 0.2x_4 & & \\ & x_2 + 0.8x_3 + 0.1x_4 & = & 3.5 \\ & x_1 - 0.2x_3 + 0.1x_4 & = & 1.5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Der zu

$$x_2 + 0.8x_3 + 0.1x_4 = 3.5$$

gehörenden Gomory Schnitt lautet wegen $f_0 = 0.5$, $f_1 = f_2 = 0$, $f_3 = 0.8$ und $f_4 = 0.1$ wie folgt

$$\frac{1 - 0.8}{1 - 0.5} x_3 + \frac{0.1}{0.5} x_4 \geq 1,$$

d.h.

$$2x_3 + x_4 \geq 5.$$

Drückt man diese Ungleichung mit x_1 und x_2 aus ergibt sich

$$3x_1 + 2x_2 \leq 9.$$

Die optimale Lösung von

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1 + x_2 & & \\ & -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 & \leq & 19 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

ist $y^* = (1, 3)$. Da y^* ganzzahlig ist, löst dieser Punkt das urspüngliche ILP exakt.

7.2 Dynamic Programming

Zu $A = [a^1 \mid a^2 \mid \ldots \mid a^n] \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c = (c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{Z}^n$ und $X \in \mathbb{N}$ betrachten wir folgendes Problem

$$(P) : \max\{c^T x \mid x \in \mathbb{Z}^n \cap [0, X]^n, Ax = b\}.$$

Ist $a_{\max}$ der maximale Betrag eines Eintrages von A, so gilt $Ax \in \mathbb{Z}^m \cap [0, U]^m$ für jedes $x \in \mathbb{Z}^n \cap [0, X]^n$ und $U = n a_{\max} X$.

Für $a \in \{-U, \ldots, U\}^m$ und $i \in \{0, \ldots, n\}$ sei

$$c(i, a) = \max\{c^T x \mid x \in \mathbb{Z}^n \cap [0, X]^n, Ax = a, x = (x_1, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0)^T\}.$$

Lemma 7.20. *Seien alle Bezeichnungen wie oben. Sei $a \in \{-U, \dots, U\}^m$. Es gilt*

$$c(0,a) = \begin{cases} 0 & , a = 0, \\ -\infty & , a \in \{-U, \dots, U\}^m \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Für $i \in [n]$ ist $c(i,a)$ gleich

$$\max\{c(i-1,a') + c_i x_i \mid a' \in \{-U, \dots, U\}^m, x_i \in \{0, \dots, X\}, a = a' + x_i a^i\}$$

□

Satz 7.21. *Seien alle Bezeichnungen wie oben. Für festes m existiert ein Algorithmus, der (P) exakt löst und dessen Laufzeit polynomiell in U, n, $\langle A \rangle$ und $\langle c \rangle$ beschränkt ist.*

□

7.3 Branch and Bound

Wir betrachten folgendes Problem

$$(P) : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$$

mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $c \in \mathbb{Q}^n$. Ausgehend von $\Pi_1 = \{P_1^1\}$ für $P_1^1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ erzeugen wir eine Folge $(\Pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\Pi_k = \{P_k^1, \dots, P_k^k\}$ wobei

- für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Mengen in Π_k disjunkte Polyeder sind und
- alle ganzzahligen Elemente von P in $P_k^1 \cup \dots \cup P_k^k$ liegen.

Input: $(P) : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ wie oben.
Output: Eine optimale Lösung x^* von (P) oder die Aussage, dass $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ leer ist.

begin
  $P_1^1 \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$;
  $k \leftarrow 1$;
  repeat
    if $\forall j \in [k] : P_k^j = \emptyset$ **then return** $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ *ist leer*;
    $\mu_j \leftarrow \max\{c^T x \mid x \in P_k^j\}$ für $j \in [k]$;
    Bestimme $j^* \in [k]$ mit $\mu_{j^*} = \max\{\mu_j \mid j \in [k]\}$;
    Bestimme $x^* \in P_k^{j^*}$ mit $c^T x^* = \mu_{j^*}$;
    if $x^* \in \mathbb{Z}^n$ **then return** x^*;
    Bestimme $i \in [n]$ mit $x_i^* \notin \mathbb{Z}$;
    $P_{k+1}^j \leftarrow P_k^j$ für $j \in [k] \setminus \{j^*\}$;
    $P_{k+1}^{j^*} \leftarrow \{x \in P_k^{j^*} \mid x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor\}$;
    $P_{k+1}^{k+1} \leftarrow \{x \in P_k^{j^*} \mid x_i \geq \lceil x_i^* \rceil\}$;
    $k \leftarrow k+1$;
  until return;
end

Algorithm 1: Branch-and-Bound Methode nach Dakin

Beispiel 7.22. Wir betrachten das Problem

$$\begin{array}{rcl} \max \quad c^T x = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 & & \\ x & \in & P \\ x & \in & \mathbb{Z}^3 \end{array}$$

wobei P die Menge der Punkte (x_1, x_2, x_3) mit

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 & \leq & 8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 & \leq & 7 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 12 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Hier die Daten zur Branch-and-Bound Methode.

$P_1^1 = P$	$x^* = \left(0, \frac{11}{12}, \frac{5}{6}\right)$	$c^T x^* = \frac{95}{12}$	$j^* = 1$	$i = 2$
$P_2^1 = \{x \in P \mid x_2 \leq 0\}$	$x^* = \left(0, 0, \frac{7}{4}\right)$	$c^T x^* = 7$		
$P_2^2 = \{x \in P \mid x_2 \geq 1\}$	$x^* = \left(\frac{1}{7}, 1, \frac{4}{7}\right)$	$c^T x^* = \frac{54}{7}$	$j^* = 2$	$i = 1$
$P_3^1 = P_2^1$	$x^* = \left(0, 0, \frac{7}{4}\right)$	$c^T x^* = 7$		
$P_3^2 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 1\}$	$x^* = \left(0, 1, \frac{1}{3}\right)$	$c^T x^* = \frac{23}{3}$	$j^* = 2$	$i = 3$
$P_3^3 = \{x \in P \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_4^1 = P_2^1$	$x^* = \left(0, 0, \frac{7}{4}\right)$	$c^T x^* = 7$	$j^* = 1$	$i = 3$
$P_4^2 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 1, x_3 \leq 0\}$	$x^* = \left(0, \frac{4}{3}, 0\right)$	$c^T x^* = \frac{20}{3}$		
$P_4^3 = P_3^3$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_4^4 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1\}$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_5^1 = \{x \in P \mid x_2 \leq 0, x_3 \leq 1\}$	$x^* = \left(\frac{3}{5}, 0, 1\right)$	$c^T x^* = \frac{29}{5}$		
$P_5^2 = P_4^2$	$x^* = \left(0, \frac{4}{3}, 0\right)$	$c^T x^* = \frac{20}{3}$	$j^* = 2$	$i = 2$
$P_5^3 = P_4^3$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_5^4 = P_4^4$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_5^5 = \{x \in P \mid x_2 \leq 0, x_3 \geq 2\}$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_6^1 = P_5^1$	$x^* = \left(\frac{3}{5}, 0, 1\right)$	$c^T x^* = \frac{29}{5}$	$j^* = 1$	$i = 1$
$P_6^2 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 = 1, x_3 \leq 0\}$	$x^* = (0, 1, 0)$	$c^T x^* = 5$		
$P_6^3 = P_5^3$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_6^4 = P_5^4$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_6^5 = P_5^5$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_6^6 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 2, x_3 \leq 0\}$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_7^1 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 1\}$	$x^* = (0, 0, 1)$	$c^T x^* = 4$		
$P_7^2 = P_6^2$	$x^* = (0, 1, 0)$	$c^T x^* = 5$	$j^* = 2$	
$P_7^3 = P_6^3$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_7^4 = P_6^4$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_7^5 = P_6^5$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_7^6 = P_6^6$	x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_7^7 = \{x \in P \mid x_1 \geq 1, x_2 \leq 0, x_3 \leq 1\}$	$x^* = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$	$c^T x^* = 5$		

Daher ist $(0, 1, 0)$ eine optimale Lösung.

Satz 7.23 (Dakin 1965)**.** *Sei (P) wie oben. Ist P_1^1 beschränkt, so terminiert obige Branch-and-Bound Methode nach endlich vielen Schritten.*

□

Bemerkung 7.24. Obige Branch-and-Bound Methode enthält streng genommen noch keinen "Bound"-Schritt: Bestimmt man im Verlauf des Algorithmus untere Schranken für den Wert einer optimalen Lösung von (P) (z.B. durch $c^T x$ für ganzzahlige Punkte in P_1^1), so kann man alle P_k^j eliminieren, für die μ_j kleiner dieser Schranke ist.