Optimierung / OR I
Sommersemester 2013

Dr. Jens Maßberg
Dr. Christian Löwenstein

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:
Seinen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das LP $\max\{c^\top x : Ax \leq b\}$ grafisch und geben Sie jeweils die Menge der optimalen Lösungen für die folgende Zielfunktionsvektoren c an:

$$1.\ c = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad 2.\ c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 3.\ c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2: Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Seien $a_1, a_2, ..., a_n, b \in \mathbb{K}^m$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage gilt.
Existieren keine $\lambda_i \in \mathbb{K}$ für $i \in [n]$ mit $b = \sum\limits_{i \in [n]} \lambda_i a_i$, dann existiert ein $y \in \mathbb{K}^m$ mit $y^\top b < 0$ und $y^\top a_i = 0$ für $i \in [n]$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3: Wenden Sie den Algorithmus aus dem Beweis von Satz 2.3 auf folgende Instanz an:

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$I = \{1, 2\}, (\lambda_1, \lambda_2) = (-2, 1).$$

Notieren sie dazu für jeden Schleifendurchlauf die Werte der Variablen h und y und ggf. s, I und λ_i für $i \in I$.

Input: Vektoren $a_1, a_2, ..., a_n, b \in \mathbb{K}^m$, eine Menge $I \subseteq [n]$, für die $\{a_i \mid i \in I\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren ist und Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{K}$ für $i \in I$ mit $b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$.

Output: Entweder eine Darstellung wie in (i) von Satz 2.3 oder ein y wie in (ii) von Satz 2.3.

begin
    while $\exists i \in I : \lambda_i < 0$ **do**
        Sei h der kleinste Index in I mit $\lambda_h < 0$;
        Sei $y \in \mathbb{K}^m$ so, dass $y^\top a_i = 0$ für $i \in I \setminus \{h\}$ und $y^\top a_h > 0$ gilt;
        if $\forall i \in [n] : y^\top a_i \geq 0$ **then**
            return y;
        else
            Sei s der kleinste Index in $[n]$ mit $y^\top a_s < 0$;
            $I \leftarrow (I \setminus \{h\}) \cup \{s\}$;
            Bestimme $\lambda_i \in \mathbb{K}$ für $i \in I$ mit $b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$;
        end
    end
    return $b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$;
end

Algorithm 1: Einfache Variante des Simplex Algorithmus

(10 Punkte)

Abgabetermin: 24. April, vor der Übung (14.15 Uhr).

Anmeldung zur ARSnova Session unter:

`https://arsnova.thm.de`

Session ID für "Optimierung und OR I":

`84 94 44 58`

Infos und Anleitungen zu ARSnova:

`http://blog.mni.thm.de/arsnova`

Definition 2.2. *Für eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die lineare Hülle* $\operatorname{lin}(X)$*, die affine Hülle* $\operatorname{aff}(X)$*, die konvexe Hülle* $\operatorname{conv}(X)$ *und der durch X erzeugte konvexe Kegel* $\operatorname{cone}(X)$ *wie folgt definiert*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{lin}(X) &= \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \mid t \in \mathbb{N}_0, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R} \textit{ für } i \in [t] \right\} \\
\operatorname{aff}(X) &= \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \mid t \in \mathbb{N}_0, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R} \textit{ für } i \in [t] \textit{ mit } \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1 \right\} \\
\operatorname{conv}(X) &= \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \mid t \in \mathbb{N}_0, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq \mathbf{0}} \textit{ für } i \in [t] \textit{ mit } \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1 \right\} \\
\operatorname{cone}(X) &= \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \mid t \in \mathbb{N}_0, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq \mathbf{0}} \textit{ für } i \in [t] \right\}.
\end{aligned}
$$

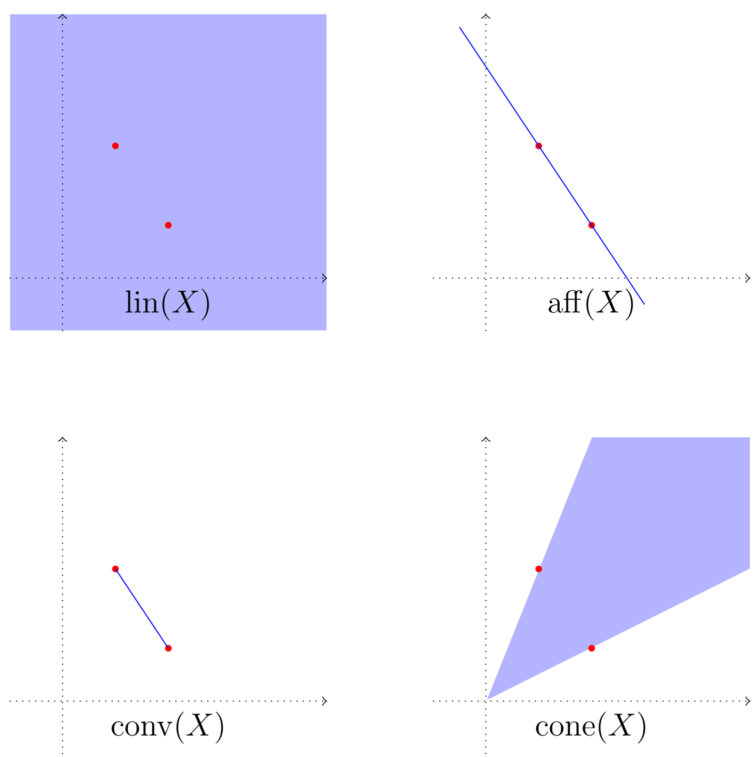

Abbildung 1: $\operatorname{lin}(X)$, $\operatorname{aff}(X)$, $\operatorname{conv}(X)$ und $\operatorname{cone}(X)$ für $X = \{(1, 2.5), (2, 1)\}$.