Dr. Jens Maßberg
Dr. Chistian Löwenstein

Institut für Optimierung und Operations Research
Sommersemester 2013

Optimierung / OR I

Übungsblatt 2

Aufgabe 1:
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge, seinen $x_1, \dots, x_k \in X$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i \in [k]} \lambda_i = 1$. Zeigen Sie, dass $\sum_{i \in [k]} \lambda_i x_i$ ein Element von X ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 2:
Seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Beweisen Sie:
Es gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen.

(a) $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$.

(b) $\{y \in \mathbb{K}^m \mid y^T A = 0, y \geq 0, y^T b < 0\} \neq \emptyset$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3:
Wenden Sie das Fourier-Motzkin-Eliminationsverfahren an, um festzustellen, ob das folgende Ungleichungssystem eine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{rrrrcr}
2x_1 & +6x_2 & +2x_3 & -x_4 & \leq & 1 \\
x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +x_4 & \leq & 0 \\
-3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & -3x_4 & \leq & 2 \\
-x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -3x_4 & \leq & -3 \\
 & 3x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leq & 4
\end{array}$$

(10 Punkte)

→ b.w.

Aufgabe 4:
Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $x \in M$, so nennt man x eine *Ecke* von M, falls aus $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ für $\lambda \in (0,1)$ und $y, z \in M$ folgt, daß $x = y = z$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene und konvexe Menge und $x \in M$. Existiert ein $a \in \mathbb{R}^n$, so daß $a^T x > a^T y$ für alle $y \in M \setminus \{x\}$ gilt, so ist x eine Ecke von M.

(b) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie jeweils Ihre Behauptung.

   (i) Eine nicht leere und konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$, die keine Gerade ganz enthält, besitzt eine Ecke.

   (ii) Eine konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$, die eine Ecke besitzt, enthält keine Gerade ganz.

   (iii) Eine nicht leere, konvexe und abgeschlossene Menge im $\mathbb{R}^n$, die keine Gerade ganz enthält, besitzt eine Ecke.

   (iv) Eine konvexe und abgeschlossene Menge im $\mathbb{R}^n$, die eine Ecke besitzt, enthält keine Gerade ganz.

(10 Punkte)

Abgabetermin: 8.Mai, vor der Übung (14.15 Uhr).