



Optimierung / OR I

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: [Das duale des dualen Problems ist das ursprüngliche Problem]
(D) und (P) seien wie in Kapitel 3 der Vorlesung definiert.

- (i) Formen Sie das Problem (D) in ein Problem der Form von (P) um, d.h. finden Sie eine Matrix A' und Vektoren b' und c' , so dass

$$\min\{b^T y \mid y \in \mathbb{R}^m, y^T A = c^T, y \geq 0\} = \max\{c'^T y \mid y \in \mathbb{R}^m, A'y \leq b'\}$$

gilt. Das resultierende Problem $\max\{c'^T \dots\}$ nennen wir (P').

- (ii) Bilden Sie das duale Problem (D') zu (P') und zeigen Sie, dass es, wiederum nach Umformung zu einem Problem (P'') der Form von (P), zu dem Problem (P) äquivalent ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 2: Ist der Punkt $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine optimale Lösung des folgenden linearen Programmes?

$$\begin{array}{llllll} \max & 7x_1 & +6x_2 & +5x_3 & -2x_4 & +3x_5 \\ \text{s.t.} & x_1 & +3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & +2x_5 & \leq 4 \\ & 4x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & \leq 3 \\ & 2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & -2x_4 & +5x_5 & \leq 5 \\ & 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & -2x_5 & \leq 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Beantworten Sie die Frage mit Hilfe des Satzes über den komplementären Schlupf (Folgerung 3.4 der Vorlesung).

(10 Punkte)

Aufgabe 3: Im Job-Assignment-Problem sind n Jobs mit Arbeitsstundenbedarf $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und m Arbeiter gegeben. Die Mengen $S_i \subseteq \{1, \dots, m\}$ geben die Arbeiter an, die den Job $i \in \{1, \dots, n\}$ erledigen können. An jedem Job $i \in \{1, \dots, n\}$ können gleichzeitig beliebig viele Arbeiter aus S_i arbeiten. Eine Person kann an verschiedenen Jobs arbeiten, jedoch nur nacheinander.

- (i) Stellen Sie ein LP auf, dass die Gesamtzeit zur Erledigung aller Jobs minimiert.
- (ii) Bestimmen Sie das duale LP
- (iii) Geben Sie für $n = 2$ und $t_1, t_2 > 0$ einen direkten Algorithmus an, der eine optimale primale und eine optimale duale Lösung findet, und begründen Sie seine Korrektheit.

(10 Punkte)

Abgabetermin: 15.Mai, vor der Übung (14.15 Uhr).