Dr. Jens Maßberg
Dr. Chistian Löwenstein

Institut für Optimierung und Operations Research
Sommersemester 2013

Optimierung / OR I

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:
Zu einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und Vektoren $b \in \mathbb{K}^m$ und $c \in \mathbb{K}^n$ sei (P) das Optimierungsproblem

$$(P) : \max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}.$$

und (D) das "duale" Problem

$$(D) : \min\{b^T y \mid y \in \mathbb{R}^m, y^T A = c^T, y \geq 0\}.$$

In der Vorlesung haben wir folgenden Satz kennengelernt:

Folgerung 3.4 (Satz von komplementären Schlupf)**.** *Seien (P) und (D) wie oben. Besitzt eines der Probleme (P) und (D) eine optimale Lösung so auch das andere und es gilt für $x \in P$ und $y \in D$, dass x und y genau dann optimale Lösungen von (P) und (D) sind, wenn $y^T(b - Ax) = 0$ gilt.*

Wir betrachten nun die Probleme

$$(P_1) : \max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

und

$$(D_1) : \min\{b^T y \mid y^T A \geq c^T, y \geq 0\}.$$

Der obige Satz vom komplementären Schlupf gilt nur für Probleme der Form (P) und (D). Wir wollen nun einen analogen Satz für Probleme der Form (P_1) herleiten.

(i) Zeigen Sie, dass (D_1) das zu (P_1) duale Problem ist.

(ii) Formen Sie das Problem (P_1) in ein Problem der Form (P) um. Wie sieht die komplementäre Schlupf Bedingung für (P_1) aus?

(iii) Stellen Sie eine komplementäre Schlupf Bedingung für das LP (D_1) auf.

(3+4+3 Punkte)

Aufgabe 2: Falls nicht anders gesagt wird, betrachten wir im Folgenden immer ein LP in kanonischer Form $\min c^T x$, s.t. $Ax = b, x \geq 0, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \operatorname{rang}(A) = m$. Beweisen oder widerlegen Sie (kurz) die folgenden Aussagen.

a) Hat das LP min $c^T x$, s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$ einen endlichen Optimalwert, so ist das LP min $c^T x$, s. t. $Ax = b'$, $x \geq 0$ für alle b' beschränkt.

b) Zu jedem LP in n unbeschränkten Variablen gibt es ein äquivalentes LP in $n + 1$ nichtnegativen Variablen.

c) Die beiden LPs max $c^T x$, s. t. $Ax \leq b, x \geq 0$ und max $-c^T x$, s. t. $Ax \leq b, x \geq 0$ können beide zulässige Lösungen mit beliebig großem Zielfunktionswert haben.

d) Ist $A = A^T$, so ist jede zulässige Lösung des LP min $c^T x$, s. t. $Ax = c$, $x \in \mathbb{R}^n$ optimal.

e) Falls keine Ecke entartet und das LP nach unten beschränkt ist, so ist die Optimallösung eindeutig.

f) Ist eine unbeschränkte Variable x_j durch $x_j^+ - x_j^-$ $(x_j^+, x_j^- \geq 0)$ ersetzt worden, so ist im Simplexverfahren in jedem Schritt höchstens eine der Variablen x_j^+, x_j^- ungleich null.

(12 Punkte)

Aufgabe 3:
Seien $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ und $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Beweisen Sie:

(i) $\langle r_1 + r_2 + \ldots + r_n \rangle \leq 2(\langle r_1 \rangle + \langle r_2 \rangle + \ldots + \langle r_n \rangle)$.

(ii) $||x||_2 \leq ||x||_1 \leq 2^{\langle x \rangle - n} - 1$.

(iii) $\langle x + y \rangle \leq 2(\langle x \rangle + \langle y \rangle)$.

(iv) $\langle x^T y \rangle \leq 2(\langle x \rangle + \langle y \rangle)$.

(10 Punkte)

Zusatzaufgabe (ohne Punkte)
Ein Konservenhersteller betreibt zwei Konservenfabriken. Drei Landwirte $S1, S2$ und $S3$ bieten dem Hersteller frische Früchte in folgenden Mengen und zu folgenden Preisen an:
S1: 200 Tonnen für 11€/Tonne
S2: 310 Tonnen für 10€/Tonne
S3: 420 Tonnen für 9€/Tonne
Die Transportkosten in Euro pro Tonne betragen:

	zu: Fabrik A	Fabrik B
von: S1	3	3.5
S2	2	2.5
S3	6	4

Die Fabriken haben die folgenden Kapazitäten und Arbeitskosten:

	Fabrik A	Fabrik B
Kapazität	460 Tonnen	560 Tonnen
Arbeistkosten	26€/Tonne	21€/Tonne

Die konservierten Früchte können für 50€ pro Tonne weiterverkauft werden und der Konservenhersteller kann seine gesamte Produktion verkaufen. Der Hersteller möchte seinen Profit maximieren.

- Formulieren Sie ein entsprechendes lineares Programm.
- Welche Voraussetzungen haben Sie bei der Formulierung ihres LPs angenommen?

(0 Punkte)

Abgabetermin: 29.Mai, vor der Übung (14.15 Uhr).