Dr. Jens Maßberg
Dr. Chistian Löwenstein

Institut für Optimierung und Operations Research
Sommersemester 2013

Optimierung / OR I

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Gegeben seien eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$. Damit existiert eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Orthogonalmatrix $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $A = O^T DO$ gilt. Mit der Diagonalmatrix $D^{\frac{1}{2}}$, deren Diagonalelemente den Wurzeln der Diagonalelemente von D entsprechen, können wir $A^{\frac{1}{2}} = O^T D^{\frac{1}{2}} O$ definieren, für die $A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$E(A,a) = A^{\frac{1}{2}} S(0,1) + a$$

gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 2: Führen Sie für das Polyeder P, definiert durch die Ungleichungen

$$\begin{array}{rcl} -x_1 - x_2 & \leq & -1 \\ x_1 & \leq & 1 \\ -x_1 + x_2 & \leq & \frac{1}{2} \\ x_1, x_2 & \geq & 0, \end{array}$$

beginnend mit $a_0 = 0$, $A_0 = \begin{pmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$, $E_0 = E(A_0, a_0)$, $P' = P$ und $N = 5$ die Ellipsoidmethode durch, um festzustellen, ob P leer ist.
Anmerkung: Die Ellipsoidmethode ist im Anhang angegeben. Sie können direkt mit Schritt 1 starten.

(10 Punkte)

$\rightarrow$ b.w.

Aufgabe 3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix , λ_1 der kleinste Eigenwert und λ_n der größte Eigenwert von A. Zeigen Sie:

$$B(x, \sqrt{\lambda_1}) \subseteq Ell(A, x) \subseteq B(x, \sqrt{\lambda_n}),$$

wobei $B(x, \lambda)$ der n-dimensionale Ball mit Mittelpunkt x und Radius λ bezeichnet.

(10 Punkte)

Abgabetermin: 5.Juni, vor der Übung (14.15 Uhr).

Input: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$.
Output: Entscheidet, ob $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ leer ist.
begin

$\frac{1}{\epsilon} \leftarrow 2m2^{4\langle A \rangle + 10\langle b \rangle}$;
$R \leftarrow 2^{4\langle A \rangle + 2\langle b \rangle}$;

$$P' \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b + \epsilon \mathbf{1}, 0 \leq x \leq R\mathbf{1}\};$$

$$N \leftarrow \left\lceil \log_{\sqrt{f(n)}} \left(\left(\frac{\epsilon}{n2^{<A>}2\sqrt{n}R} \right)^n \right) \right\rceil;$$

$A_0 \leftarrow nR^2 I_n$; $a_0 \leftarrow 0$; $E_0 \leftarrow E(A_0, a_0)$;
$k \leftarrow 0$;
while $k \leq N$ **do**

  if $a_k \in P'$ **then return** (P ist nicht leer);
  Sei $c^T x \leq \beta$ eine Ungleichung aus der Beschreibung von P', die a_k verletzt, d.h. $c^T x \leq c^T a_k$ für alle $x \in P'$;
  Setze A_{k+1} und a_{k+1} wie in Satz 6.13 so, dass

$$E_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x \leq c^T a_k\} \subseteq E(A_{k+1}, a_{k+1})$$

  gilt;
  $E_{k+1} \leftarrow E(A_{k+1}, a_{k+1})$;
  $k \leftarrow k + 1$;

end
return (P ist leer);

end

Algorithm 1: Ellipsoid Methode