Dr. Jens Maßberg
Dr. Chistian Löwenstein

Institut für Optimierung und Operations Research
Sommersemester 2013

Optimierung / OR I

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: Beweisen Sie:
Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist genau dann vollständig unimodular, wenn für alle $b \in \mathbb{Z}^m$ und $c \in \mathbb{Z}^n$ beide Optima in der Dualitätsgleichung

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\}$$

in ganzzahligen Vektoren angenommen werden sofern sie endlich sind.

(10 Punkte)

Aufgabe 2: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist vollständig unimodular,

(ii) A^T ist vollständig unimodular,

(iii) $(A \mid I)$ ist vollständig unimodular,

(iv) $\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{pmatrix}$ ist vollständig unimodular.

(10 Punkte)

→ b.w.

Aufgabe 3: Betrachten Sie den folgenden Polyeder für ganzzahlige Vektoren $(a,b,c,d)^T \in \mathbb{Z}^4$:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax \leq (a,b,c,d)^T, x \geq 0\}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Setzen Sie für a, b, c und d die letzten vier Ziffern Ihrer Matrikelnummer ein und berechnen Sie eine Ecke ($\neq (0,0,0,0)^T$) von P.

(ii) Beweisen Sie, dass für alle $(a,b,c,d)^T \in \mathbb{Z}^4$ alle Ecken von P ganzzahlig sind.

(10 Punkte)

Zusatzaufgabe

Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem mit der stückweise linearen Funktion f:

$$\min f(x) + 8y$$

s.t.

$$\begin{aligned} x + y &\geq 5 \\ y &\leq 4 \\ 0 \leq x &\leq 8 \end{aligned}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 10x & 0 \leq x \leq 2 \\ 8x + 4 & 2 \leq x \leq 4 \\ 6x + 12 & 4 \leq x \leq 6 \\ 4x + 24 & 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Formulieren Sie dieses Problem als ganzzahliges lineares Programm.

(10 Bonuspunkte)

Abgabetermin: 19.Juni, vor der Übung (14.15 Uhr).